§ 4. Перпендикулярность прямых и плоскостей.

Определения перпендикулярных прямых, перпендикулярной прямой и плоскости, перпендикулярных плоскостей даны в школьном учебнике геометрии. Перечислим самые важные теоремы, которые используются при решении задач: *признак перпендикулярности прямой и плоскости, теорема о трех перпендикулярах*, *признак перпендикулярности плоскостей.* Формулировки этих теорем можно найти в учебнике.

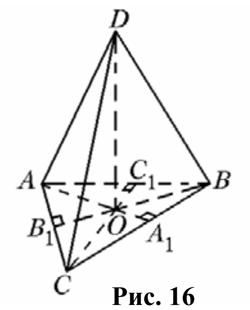


Рис. 16

Пример 13. *Ребра AB и CD, AD и BC тетраэдра перпендикулярны. Докажите, что ребра AC и BD также перпендикулярны.*

Опустим из точки D перпендикуляр DO на плоскость ABC (рис. 16). По теореме о трех перпендикулярах из того, что $CD \perp AB$ следует, что $CO \perp AB$, т.е. точка O лежит на прямой, содержащей высоту CC_1 треугольника ABC. Аналогично, точка O лежит на прямой, содержащей высоту AA_1 и, значит, O – ортоцентр (точка пересечения высот) треугольника ABC. Следовательно, $BO \perp AC$ и по теореме о трех перпендикулярах $BD \perp AC$.

Пример 14. *Доказать, что прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является кубом тогда и только тогда, когда $B_1D \perp A_1BC_1$.*

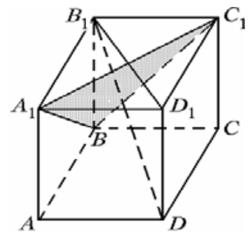


Рис. 17

Если $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб (рис.17), то $A_1C_1 \perp D_1B_1$, но D_1B_1 — проекция наклонной DB_1 на плоскость $A_1B_1C_1$, следовательно, по теореме о трех перпендикулярах $DB_1 \perp A_1C_1$. Аналогично $DB_1 \perp A_1BC_1$. Обратно, если $DB_1 \perp A_1BC_1$, то $DB_1 \perp A_1C_1$ и по теореме о трех перпендикулярах $D_1B_1 \perp A_1C_1$. Но диагонали прямоугольника перпендикулярна, если он является квадратом, значит $A_1B_1 = B_1C_1$. Аналогично $A_1B_1 = BB_1$, т.е. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб.

Пример 15. *Постройте сечение куба* $ABCDA_1B_1C_1D_1$*, проходящее через точку* B *перпендикулярно прямой* DB_1*, и определите, в каком отношении плоскость сечения делит эту прямую.*

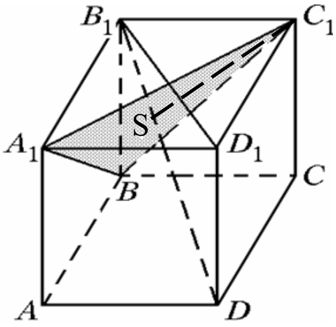


Рис. 18

Результат предыдущего примера показывает, что искомым сечением является треугольник A_1BC_1. Пусть плоскость сечения пересекает прямую DB_1 в точке S (см. рис. 18). Найдём отношение $SB_1 : DB_1$.

Пусть сторона куба равна a. Тогда, как известно, длина главной диагонали куба равна $DB_1 = a\sqrt{3}$ (можете ли вы это доказать?). Так как $A_1BC_1 \perp DB_1$, то $DB_1 \perp SA_1$, $DB_1 \perp SC_1$, $DB_1 \perp SB$. Поэтому $\Delta B_1SA_1 = \Delta B_1SC_1 = \Delta B_1SB$ по трём сторонам, и, следовательно, точка S является центром правильного треугольника C_1BA_1. Сторона этого треугольника равна $a\sqrt{2}$ (почему?), значит $SC_1 = \frac{A_1C_1}{\sqrt{3}} = a\sqrt{\frac{2}{3}}$. Наконец, из прямоугольного треугольника SB_1C_1 находим

$$SB_1 = \sqrt{B_1C_1^2 - SC_1^2} = \sqrt{a^2 - \tfrac{2}{3}a^2} = \tfrac{a}{\sqrt{3}} = \tfrac{1}{3}a\sqrt{3} = \tfrac{1}{3}DB_1.$$

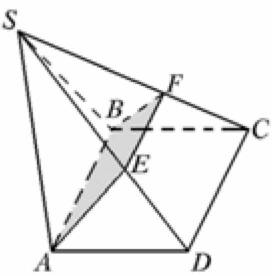
Итак, $\frac{SB_1}{DB_1} = \frac{1}{3}$.

Важный вывод. Ясно, что сечение куба, проходящее через точки A, C и D_1 также перпендикулярно прямой DB_1, кроме того, $\frac{FD}{DB_1} = \frac{1}{3}$, где F – точка пересечения плоскости ACD_1 с прямой DB_1. Полезно помнить, что *плоскости* C_1BA_1 *и* ACD_1 *рассекают куб по правильным треугольникам и делят главную диагональ этого куба на три равные части.*

Пример 16. *В основании четырехугольной пирамиды* $SABCD$ *лежит прямоугольник* $ABCD$ *со сторонами* $AB = a$, $AD = b$, *ребро* SA *перпендикулярно основанию пирамиды,* $SA = c$. *Найти: а) расстояние от точки* A *до плоскости* SCD; *б) площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку* A *перпендикулярно ребру* SD.

а) По определению *расстоянием от точки до плоскости является длина перпендикуляра, опущенного из точки на плоскость.*

Покажем, что перпендикуляр, опущенный из точки A на ребро SD является перпендикуляром к плоскости SCD (рис. 19). Действительно, по условию $SA \perp ABC \Rightarrow$ $CD \perp SA$, кроме того, $CD \perp DA$, поэтому по признаку перпендикулярности прямой и плоскости $CD \perp SAD \Rightarrow CD \perp AE$. Но по построению $AE \perp SD$, т.е. прямая AE перпендикулярна пересекающимся прямым CD и SD, следовательно, $AE \perp CSD$. Длину отрезка AE найдем, дважды вычислив площадь треугольника SAD:



$$\tfrac{1}{2} SA \cdot AD = \tfrac{1}{2} AE \cdot SD \Rightarrow AE = \frac{bc}{\sqrt{b^2 + c^2}}.$$

Рис. 19

б) В пункте а) мы показали, что $AE \perp SD$ и $CD \perp SAD$, где $CD \perp SD$. Значит, искомое сечение — трапеция $AEFB(EF \parallel CD \parallel AB)$. Эта трапеция – прямоугольная, т. к. $EF \parallel CD$, а $CD \perp AE$, т. е.

$$h = AE = \frac{bc}{\sqrt{b^2 + c^2}}.$$

Из подобия треугольников ASE и DSA имеем:

$$SE = AS^2 : SD = c^2 : \sqrt{b^2 + c^2},$$

а из подобия треугольников SEF и SDC:

$$EF = (CD \cdot SE) : SD = \frac{ac^2}{b^2 + c^2}.$$

Таким образом,

$$S_\alpha = \frac{1}{2}(EF + AB)AE = \frac{abc}{2\sqrt{b^2 + c^2}} \left(\frac{c^2}{b^2 + c^2} + 1 \right).$$

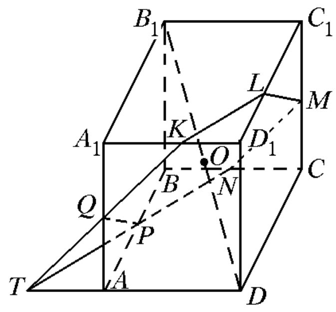


Рис. 20

Пример 17. *Доказать, что сечение куба плоскостью, перпендикулярной его главной диагонали и проходящей через центр куба, — правильный шестиугольник.*

Пусть $K, L, M, N, P, Q -$ середины ребер A_1D_1, D_1C_1, C_1C, CB, BA, AA_1 соответственно (рис. 20). Покажем, что эти точки лежат в плоскости сечения. Из равенства прямоугольных треугольников B_1A_1K и DD_1K (по двум катетам) следует, что $B_1K = DK$. Поэтому если $O -$ центр куба, то $KO -$ медиана равнобедренного треугольника B_1KD, следовательно

$KO \perp B_1D$, т.е. KO лежит в плоскости α. Аналогично и остальные вершины шестиугольника $KLMNPQ$ лежат в плоскости α. Длины всех сторон шестиугольника $\frac{a}{\sqrt{2}}$, где a – длина ребра куба. Далее, если T – точка пересечения α и прямой AD, то из равенства треугольников KA_1Q и TAQ, NBP и TAP следует, что $PT = QT = \frac{a}{\sqrt{2}}$, т.е. треугольник PTQ равносторонний. Отсюда $\angle NPQ = 180° - \angle TPQ = 120°$. Аналогично и другие углы шестиугольника $KLMNPQ$ равны $120°$, т.е. все стороны и углы шестиугольника равны между собой, следовательно, он правильный.

Пример 18. *Для правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ вычислить: а) расстояние от вершины A до плоскости SCD, если $AB = a, DS = b$; б) наибольшее возможное значение угла между ребром SA и плоскостью SCD.*

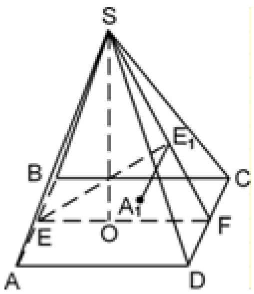


Рис. 21

а) В этом примере перпендикуляр, опущенный из точки A на плоскость SCD, не попадает на прямую SD (рис. 21). Действительно, $AB \parallel CD$ и значит $AB \parallel SCD$, поэтому расстояние h от любой точки прямой AB до плоскости SCD одно и то же. Пусть E и F — середины ребер AB и CD. Покажем, что если $EE_1 \perp SF$, то $EE_1 \perp SCD$ (*вспомогательные сечения типа SEF, SAC очень часто используются при решении стереометрических задач!*). Высота SO пирамиды перпендикулярна прямой DC, лежащей в плоскости ее основания. Кроме того, $EF \perp DC$, и значит, $DC \perp SEF$, откуда $DC \perp EE_1$. Но по построению $EE_1 \perp SF$, таким образом, по признаку перпендикулярности прямой и плоскости $EE_1 \perp SCD$. Теперь можно определить положение проекции A_1 точки A на плоскость SCD: четырехугольник AEE_1A_1 — прямоугольник, поэтому $E_1A_1 = AE = DF$, т.е. A_1 лежит вне треугольника SCD. Рассмотрим площадь треугольника SEF, получаем $\frac{1}{2} SO \cdot EF = \frac{1}{2} EE_1 \cdot SF$, откуда

$$EE_1 = a\left(\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{2}}\right) : \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}} .$$

б) *Углом между прямой и плоскостью является угол между прямой и ее ортогональной проекцией на плоскость.* Поэтому искомый угол φ — это $\angle ASA_1$, т.е. $\sin\varphi = \frac{AA_1}{AS} = \frac{EE_1}{AS} = \frac{a\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{2}}}{b\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}}$. Введем безразмерную переменную $x = \frac{a}{b}$, тогда $\sin\varphi = x\frac{\sqrt{1-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}$. Пусть $t = x^2$, большему значению $\sin\varphi$ соответствует (в силу $\sin\varphi > 0$) большее значение $f(t) = \sin^2\varphi = 2t\frac{2-t}{4-t}$. Имеем:

$$f'(t) = 2\left(\frac{2t - t^2}{4-t}\right)' = 2\frac{(2-2t)(4-t)-(2t-t^2)(-1)}{(4-t)^2} = 2\frac{t^2 - 8t + 8}{(4-t)^2} =$$

$= 2\frac{(t-t_1)(t-t_2)}{(4-t)^2}$, где $t_1 = 4 - 2\sqrt{2}, t_2 = 4 + 2\sqrt{2}$. Трехчлен $(t-t_1)(t-t_2)$ меняет знак с «+» на «–» в точке t_1, причем $t_1 \in (0;\sqrt{2})$, поэтому $\max f(t) = f(t_1) = 2(2-\sqrt{2})^2$.

Итак, $\max\sin\varphi = \sqrt{2}(2-\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} - 2$ и $\max\varphi = \arcsin(2\sqrt{2} - 2)$.

Пример 19. *Точка M — середина ребра D_1D куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a. Найти угол и расстояние между прямыми A_1C_1 и CM.*

Углом между скрещивающимися прямыми называется угол между пересекающимися прямыми, параллельными данным. Пусть N — середина ребра BB_1 (рис. 22), тогда $A_1N \parallel CM$ и значит $\varphi = \angle NA_1C_1$ — искомый.

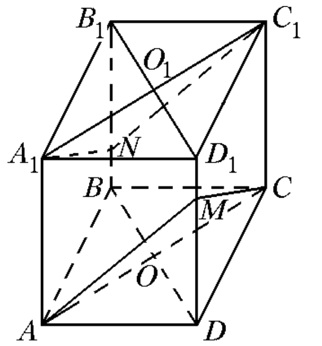


Рис. 22

Из треугольника A_1NC_1 со сторонами

$$A_1C_1 = a\sqrt{2},\ A_1N = C_1N = a\frac{\sqrt{5}}{2}$$

получаем: $\cos\varphi = \left(\frac{1}{2}A_1C_1\right)/A_1N = \sqrt{\frac{2}{5}}, \varphi = \arccos\sqrt{\frac{2}{5}}$. *Расстоянием h между скрещивающимися прямыми l_1 и l_2 называется длина наименьшего из отрезков с концами данных прямых.*

Утверждение 1. h — длина общего перпендикуляра к l_1 и l_2.

Утверждение 2. h — расстояние между параллельными плоскостями, содержащими данные прямые.

Согласно признаку параллельности плоскостей из того, что $A_1C_1 \parallel AC$ и $A_1N \parallel CM$, следует, что $(A_1C_1N) \parallel (ACM)$. Это и есть параллельные плоскости, содержащие скрещивающиеся прямые A_1C_1 и CM. Поэтому h — расстояние между плоскостями, что то же самое, расстояние от точки N до плоскости ACM. Докажем, что эта длина перпендикуляра NN_1, опущенного из точки N на прямую MO, где O — центр грани $ABCD$. Действительно, $AC \perp D_1D$ и кроме того, $AC \perp BD$. Поэтому $AC \perp BB_1D_1D$, в этой плоскости лежит прямая NN_1, поэтому, в частности, $AC \perp NN_1$, т.е. прямая NN_1 перпендикулярна прямым AC и MO, т.е. плоскости ACM. Рассмотрим вспомогательное сечение BB_1D_1D (рис.23). Пусть T — точка пересечения прямых MO и BB_1. Тогда из $\Delta TBO = \Delta MDO$ следует

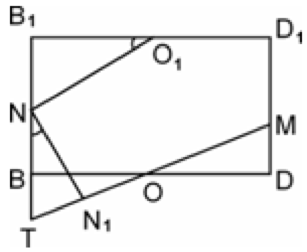


Рис. 23

$TB = MD = \dfrac{a}{2}$, откуда $NT = a$. Теперь из подобия треугольников NTN_1 и O_1NB_1 получаем $NN_1 : O_1B_1 = NT : O_1N$, где

$$O_1N = a\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow h = NN_1 = a\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

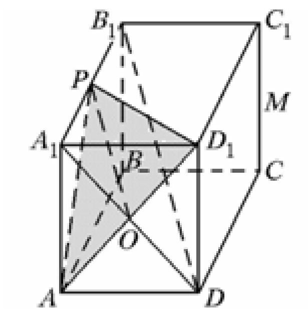


Рис. 24

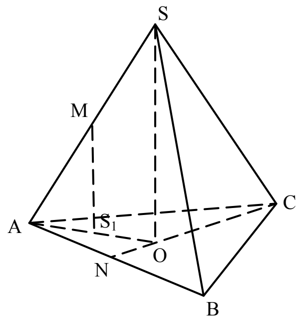
Пример 20. *Построить сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через прямую AD_1 перпендикулярно плоскости A_1BC_1.*

Утверждение. *Две плоскости перпендикулярны тогда и только тогда, когда одна из них про-*

ходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости. (В одну сторону это утверждение называется «признак перпендикулярности плоскостей»).

Таким образом, нам достаточно пересечь прямую AD_1 какой-либо прямой, перпендикулярной плоскости A_1BC_1 (рис. 24). В примере 14 мы показали, что $DB_1 \perp A_1BC_1$, поэтому нужно построить прямую l, $l \parallel DB_1$, перпендикулярную AD_1. Как легко показать, в качестве l можно взять OP — среднюю линию треугольника DA_1B_1 (во-первых, $OP \parallel DB_1$, во-вторых, $O \in AD_1$). Треугольник APD_1 — искомое сечение.

Пример 21. *Постройте сечение правильной треугольной пирамиды $SABC$ плоскостью, проходящей через точку M ребра SA перпендикулярно высоте CN основания пирамиды. Вычислите площадь этого сечения, если $AB = 2$, $AM = MS$, а высота пирамиды равна 4.*



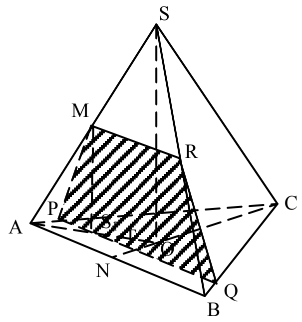


Рис. 25

Обозначим секущую плоскость через α. Так как $CN \perp \alpha$, то и $ABC \perp \alpha$. Следовательно, перпендикуляр, опущенный из точки M на плоскость ABC принадлежит плоскости α. Ясно, что этот перпендикуляр параллелен высоте SO пирамиды. Значит, что для построения сечения нужно построить высоту пирамиды и провести $MS_1 \parallel SO$ (см. рис 25а). Так как $AM = MS$, то и $AS_1 = S_1O$. Сторона сечения, лежащая на грани ABC перпендикулярна высоте CN основания и потому параллельна ребру AB. Проведём через точку S_1 прямую $PQ \parallel AB$ (см. рис. 25б). Из параллельности PQ и AB следует, что и сторона сечения, лежащая на грани ASB параллельна ребру AB. Построив $MR \parallel AB$, получим $MPQR$ – искомое сечение. Так как

$PQ \parallel AB \parallel MN$, то сечение – трапеция, а ввиду симметрии пирамиды относительно плоскости SCN, эта трапеция является равнобокой.

Найдём теперь её площадь. Так как точка M – середина ребра AS, то $MS_1 = \frac{1}{2}SO = 2$ – высота трапеции $MPQR$. Кроме того, MN – средняя линия треугольника ASB и потому $MN = \frac{1}{2}AB = 1$. Так как $PQ \parallel AB$, то длину отрезка PQ можно найти из подобия треугольников ABC и PQC: $PQ : AB = CT : CN$, где $T = CN \cap PQ$. В правильном треугольнике ABC имеем: $CN = \frac{\sqrt{3}}{2}AB = \sqrt{3}$, $ON = \frac{1}{3}CN = \frac{1}{\sqrt{3}}$. По теореме Фалеса для угла AON: $TO : NT = OS_1 : S_1A = 1:1$, поэтому $NT = \frac{1}{2}ON = \frac{1}{2\sqrt{3}}$. Следовательно, $CT = CN - NT = \sqrt{3} - \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{5}{2\sqrt{3}}$. Итак, $PQ : AB = CT : CN = \frac{5}{2\sqrt{3}} : \sqrt{3} = \frac{5}{6}$. Значит, $PQ = \frac{5}{6}AB = \frac{5}{3}$. Вычислим, наконец, площадь сечения:

$$S_{сеч} = \frac{1}{2}\left(PQ + MQ\right) \cdot MS_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{3} + 1\right) \cdot 2 = \frac{8}{3}.$$

Ответ: $S_{сеч} = \frac{8}{3}$.

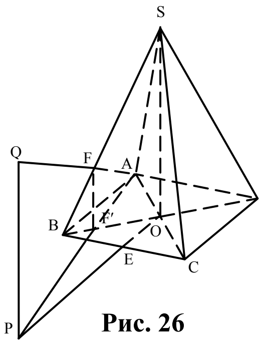


Рис. 26

Пример 22. *Параллелограмм $ABCD$ является основанием четырёхугольной пирамиды $SABCD$, высота которой проходит через точку пересечения диагоналей основания. На ребре BS выбрана точка F, а на ребре BC – точка E так, что $BF = \frac{1}{4}BS$, $BE = \frac{1}{3}BC$. На прямой AF взята точка Q, а на прямой OE – точка P так, что отрезок PQ перпендикулярен плоскости $ABCD$. Найдите длину высоты пирамиды $SABCD$, если $PQ = 12$.*

Указанная конфигурация изображена на рис. 26. На этом рисунке точка F' – проекция точки F на плоскость $ABCD$, O – точка пересечения диагоналей основания, SO – высота пирамиды. Тогда прямая AF проектируется на прямую AF', а поскольку отрезок PQ перпендикулярен плоскости $ABCD$, то прямая AQ проектируется на прямую AP, на которой и лежит точка F'. Из подобия треугольников BFF' и BSO следует, что $FF' : SO = BF : BS = 1:4$, а из подобия треугольников AFF' и AQP – $FF' : PQ = AF' : AP$. Итак, $SO = 4FF'$ и $FF' = \frac{AF'}{AP}PQ = 12 \cdot \frac{AF'}{AP}$. Значит, $SO = 4FF' = 4 \cdot 12 \cdot \frac{AF'}{AP} = 48 \cdot \frac{AF'}{AP}$. Таким образом, нам осталось найти лишь отношение $\frac{AF'}{AP}$. Рассмотрим «вид сверху» нашей конфигурации, то есть рассмотрим плоскость $ABCD$.

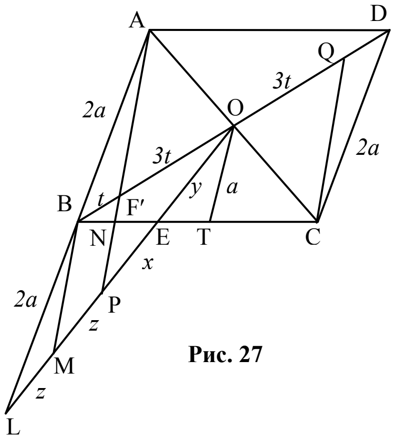


Рис. 27

Пусть длины сторон параллелограмма равны $AB = CD = 2a$ и $AD = BC = b$. Построим отрезок $OT \parallel AB$. Так как O – центр параллелограмма, то $OT = a$. Имеем $BT = b/2$, $BE = b/3$, и тогда

$$ET = b/2 - b/3 = b/6.$$

Продлим отрезок OP до пересечения в точке L с прямой AB. Треугольники OET и LEB подобны по двум углам и построим $BM \parallel AP$, следовательно $BL : OT = BE : ET = \frac{b}{3} : \frac{b}{6} = 2$, и значит $BL = 2a$. Для вычисления отношения $AF' : AP$ нам нужно решить так называемую «задачу о делении отрезка»: требуется вычислить в каком отношении отрезок BO делит отрезок AP. Стандартный метод решения такой задачи состоит в выполнении дополнительного построения. Построим отрезок $BM \parallel AP$. Так как $BL = AB$, то отрезок BM – средняя линия треугольника ALP, и значит $LM = LP = z$. Из подобия треугольников OET и LEB по двум углам получаем, что (обозначения см. на рис. 27)

$$\frac{BL}{PT} = \frac{2a}{a} = 2 = \frac{LE}{EO} = \frac{x + 2z}{y}, \text{ откуда } y = z + \frac{x}{2}. \qquad (*)$$

С другой стороны, по теореме Фалеса для угла BEM, стороны которого пересечены параллельными прямыми BM и NP, имеем $\frac{z}{x} = \frac{MP}{PE} = \frac{BN}{NE}$. Последнее отношение легко найти по теореме Фалеса, применённой к углу CBQ, стороны которого пересечены параллельными прямыми AP и CQ:

$$\frac{BN}{BC} = \frac{BF'}{BQ} = \frac{t}{t + 3t + 3t} = \frac{t}{7t} = \frac{1}{7} \Rightarrow BN = \frac{BC}{7} = \frac{b}{7} \Rightarrow \frac{BN}{BE} = \frac{b/7}{b/3} = \frac{3}{7} \Rightarrow \frac{BN}{NE} = \frac{3}{4}.$$

Итак, $\frac{z}{x} = \frac{BN}{NE} = \frac{3}{4}$, поэтому из (*), получаем $\frac{y}{x} = \frac{z}{x} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$. Наконец, для поиска искомого отношения $AF' : F'P$ быстрее всего применить теорему Менелая к треугольнику ALP и прямой BO:

$$\frac{LB}{BA}\cdot\frac{AF'}{F'P}\cdot\frac{PO}{OL}=1\Rightarrow\frac{2a}{2a}\cdot\frac{AF'}{F'P}\cdot\frac{x+y}{x+y+2z}=1\Rightarrow\frac{AF'}{F'P}=\frac{x+y+2z}{x+y}=$$

$$=1+\frac{2z}{x+y}=1+\frac{2\frac{z}{x}}{1+\frac{y}{x}}=1+\frac{2\cdot\frac{3}{4}}{1+\frac{5}{4}}=1+\frac{3/2}{9/4}=1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}.$$

Окончательно $\frac{AF'}{AP}=\frac{5}{8}$, и поэтому $SO=48\cdot\frac{AF'}{AP}=48\cdot\frac{5}{8}=30$.

Ответ: $SO=30$.

