§ 2. Сечения многогранников

Если пересечением многогранника и плоскости является многоугольник, то он называется *сечением* многогранника указанной плоскостью (*секущей плоскостью*).

Мы будем заниматься решением следующей задачи: на данном изображении многогранника построить его сечения данной плоскостью.

По сложившейся традиции, мы будем далее писать «*построить сечение многогранника*», опуская слово «*изображение*». Кроме того, вершины изображения многоугольника мы будем обозначать теми же буквами, что и соответствующие вершины оригинала. В формулировке нашей задачи мы не указали способ задания секущей плоскости. Это можно сделать по-разному, например, тремя точками, не лежащими на одной прямой, двумя точками и условием параллельности некоторой прямой, точкой и условием параллельности некоторой плоскости и т.п.

Сначала рассмотрим самый простой случай, когда секущая плоскость задана тремя точками, две из которых лежат в плоскости одной грани многогранника, а третья — в плоскости грани, смежной с первой. В этом случае, как правило (если не возникает параллельности некоторых прямых, на чем мы ниже остановимся особо), для обоснования построения не приходится выходить за рамки аксиом и, быть может, простейших следствий из них.

Приведем характерный пример.

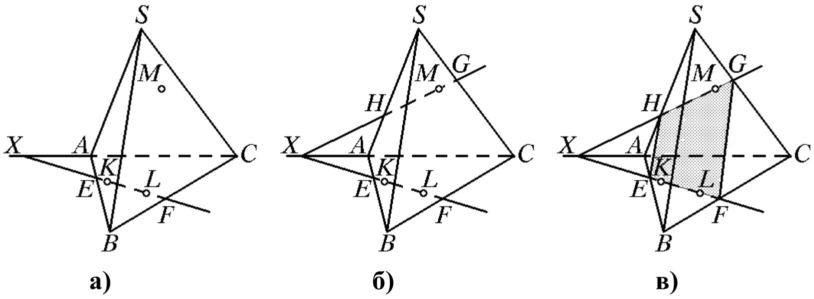


Рис. 5

Пример 3. *Построить сечение тетраэдра* $SABC$ *плоскостью, проходящей через точки* K, L, M *(рис.5 а);* $K \in (ABC)$, $L \in (ABC)$, $M \in (ASC)$.

Для решения поставленной задачи построим линии пересечения секущей плоскости с гранями тетраэдра. Предположим, что плоскость KLM (которую обозначим α) построена. Так как плоскости α и (ABC) имеют общую точку K, то они пересекаются по прямой, проходящей через точку K, а раз эти плоскости имеют еще одну общую точку — точку L, то прямая KL является линией пересечения плоскостей α и ABC. Отсюда вытекает следующее построение: проведем прямую KL до пересечения с отрезками AB и BC в точках E и F (рис. 5б). Пусть эта прямая пересекает прямую AC в точке X. Будем рассуждать аналогично: точки X и M лежат как в плоскости α, так и в плоскости (ASC), следовательно, прямая XM — их линия пересечения, поэтому строим прямую XM до пересечения с отрезками SA и SC в точках H и G (рис. 5*в*). Повторяя рассуждения по той же схеме, делаем вывод о том, что плоскости α и (ASB) пересекаются по прямой EH, а плоскости

α и (BSC)– по прямой FG. Поэтому для завершения построения остается соединить точку E с точкой H и точку F с точкой G (рис. 5*в*).

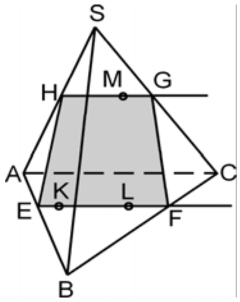


Рис. 6

Что же изменится в приведенных рассуждениях, если прямые KL и AC окажутся параллельными? В этом случае придется воспользоваться теоремами о параллельности в пространстве. Так как прямая KL параллельна прямой AC, лежащей в плоскости (ASC), то по признаку параллельности прямой и плоскости прямая KL параллельна плоскости (ASC). Но плоскость α проходит через прямую KL, следовательно (теорема о линии пересечения), линия пересечения плоскостей α и ASC должна быть параллельна прямой KL. Поэтому строим через точку M прямую, параллельную KL, до пересечения с отрезками SA и SC в точках H и G. Соединив точки H и E, а также G и F, получим искомое сечение (рис. 6).

Мы видим, что проведенное построения сечения в обоих случаях было основано на нахождении линий пересечения секущей плоскости с плоскостями граней многогранника – так называемых *следов* секущей плоскости на плоскостях граней. Отсюда и происходит название метода построения сечений, который мы только что проиллюстрировали, – «метод следов».

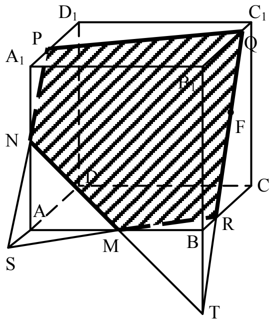
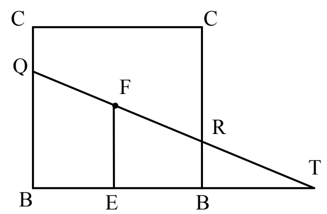


Рис. 7

Пример 6. *Построить сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через точки M и N – середины рёбер AB и AA_1 соответственно и через точку F – середину грани BCB_1C_1. В каком отношении плоскость сечения делит ребро BC .*

Выполним построение «методом следов». Для этого определим следы секущей плоскости (обозначим её α) на гранях куба. $M \in \alpha$, $N \in \alpha$, следовательно и вся прямая MN принадлежит плоскости α . Эта прямая и есть след секущей плоскости на грани ABA_1B_1 куба (см. рис. 7). Пусть прямая MN пересекает прямую BB_1 в точке T , тогда, так как $T \in (MN)$, а $(MN) \in \alpha$, то $T \in \alpha$. Однако точка T принадлежит ещё и прямой BB_1 , а значит и грани BCC_1B_1 куба. Этой же грани принадлежит и данная точка F , а потому и вся прямая TF . Так как $T \in \alpha$ и $F \in \alpha$, то

$(TF)\in\alpha$ и потому прямая TF является следом плоскости α на грани BCC_1B_1 куба. Пусть $(TF)\cap(BC)=R$, $(TF)\cap(B_1C_1)=Q$. Так как $(TF)\in\alpha$, то $R\in\alpha$ и $Q\in\alpha$. Поскольку точки M и R принадлежат плоскости α, а также грани $ABCD$ куба, то прямая MR является следом секущей плоскости. Пусть $(MR)\cap(AD)=S$, тогда $S\in\alpha$ и S лежит на грани ADD_1A_1 куба. Но на этой грани уже есть точка N, также лежащая в плоскости α. Поэтому $(SN)\in\alpha$ и прямая SN является следом секущей плоскости на грани ADD_1A_1 куба. Пусть $(SN)\cap(A_1D_1)=P$. Так как $(SN)\in\alpha$, то и $P\in\alpha$. Но $P\in(A_1B_1C_1D_1)$, и этой же грани принадлежит точка $Q\in\alpha$, значит прямая PQ является следом секущей плоскости α на грани $A_1B_1C_1D_1$ куба. Итак, построены все следы секущей плоскости на гранях куба и $MNPQR$ – искомое сечение.



Вычислим теперь отношение, в котором плоскость α делит ребро BC куба. Так как $AM=BM$ и $\angle AMN=\angle BMT$ (как вертикальные), то прямоугольные треугольники AMN и BMT равны по стороне и двум углам. Значит, $BT=AN$. Пусть ребро куба равно a, тогда $BT=AN=a/2$. Ясно, что если $FE\perp BB_1$, то FE тоже равно $a/2$. Тогда из подобия прямоугольных треугольников FET и RBT следует, что $BR:EF=BT:ET=\frac{a}{2}:a=\frac{1}{2}$.

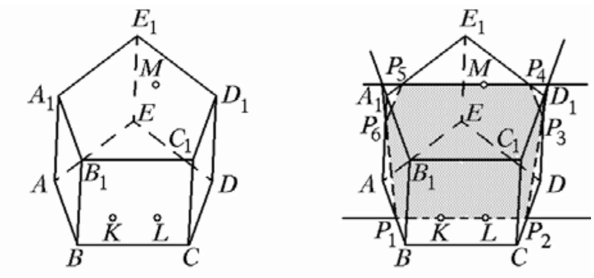
Итак, $BR=\frac{1}{2}EF=\frac{1}{2}\frac{a}{2}=\frac{a}{4}$, и потому $BR:BC=\frac{a}{4}:a=\frac{1}{4}$.

Приведем теперь пример использования для обоснования построения сечения теоремы о линиях пересечениях двух параллельных плоскостей третьей плоскостью.

если две параллельные плоскости пересечены третьей плоскостью, то прямые пересечения параллельны.

Эту теорему довольно естественно использовать, когда речь идет о сечениях многогранников, имеющих параллельные грани: призм, параллелепипедов, кубов и т. д.

Пример 7. *Построить сечение призмы* $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ *плоскостью, проходящей через точки* K,L,M *(рис.8 а), где* $K,L\in(ABC)$, $M\in(A_1B_1C_1)$.



а) **Рис. 8** **б)**

Сначала построим прямую KL – линию ресечения плоскостей KLM и ABC. Пусть эта прямая пересекает отрезки AB и CD в точках P_1 и P_2. Для того, чтобы построить след секущей плоскости на плоскости грани $A_1B_1C_1$, заметим, что плоскости ABC и $A_1B_1C_1$ параллельны (по определению призмы), поэтому линия пересечения секущей плоскости и плоскости $A_1B_1C_1$ должна быть параллельна прямой KL (и, конечно, проходит через точку M). Строим прямую, проходящую через точку M параллельно прямой KL до пересечения с отрезками A_1E_1 и E_1D_1 в точках P_5 и P_4. Дальнейшее построение аналогично построению примера 6. Сечение изображено на рис. 8 *б*.

а)

Теоремы о параллельности в пространстве применяют и в случае, когда одним из условий задания секущей плоскости является ее параллельность некоторой прямой, некоторой плоскости или двум скрещивающимся прямым. Построение сечения в следующей задаче основано на следующей теореме:

если плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то прямая пересечения плоскостей параллельна данной прямой.

Пример 8. *На ребре AD тетраэдра взята точка M так, что $DM : AD = \lambda$, $0 < \lambda < 1$ (см. рис. 9). Построить сечение тетраэдра $ABCD$ плоскостью α, проходящей через точку $M \in AD$ параллельно прямым AB и CD, если $AB : CD = m$. При каком λ это сечение будет ромбом.*

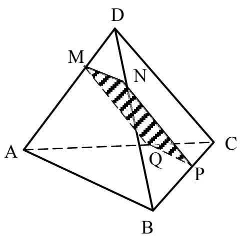


Рис. 9

Вначале выполним построение сечения (см. рис. 9). Так как плоскость сечения параллельна прямой AB, то линия MN пересечения плоскости α с плоскостью ABD параллельна прямой AB (здесь $N \in BD$). Так как плоскость сечения параллельна прямой CD, то α пересекает плоскости ACD и BCD по прямым MQ ($Q \in AC$) и NP ($P \in BC$), параллельным прямой CD. Так как $Q \in \alpha$ и $P \in \alpha$ ($P, Q \in (ABC)$), то $(PQ) \in \alpha$, и прямая PQ является следом секущей плоскости на грани ABC тетраэдра. Так как $\alpha \parallel AB$, то $PQ \parallel AB$ (почему?). Итак, четырёхугольник $MNPQ$ – искомое сечение. Так как $MN \parallel AB \parallel PQ$, а

$PN \parallel CD \parallel MQ$, то сечение – параллелограмм. Обратим внимание, что сечение является параллелограммом все зависимости от положения точки M на ребре AD.

Вычислим длины сторон параллелограмма $MNPQ$ через длины рёбер AB и CD тетраэдра. Так как треугольник ABD подобен треугольнику MND, то $MN : AB = DM : AB = \lambda$, значит, $MN = \lambda AB$. Имеем,

$$AM = AD - DM = (1-\lambda)AD.$$

Из подобия треугольников AMQ и ADC находим $MQ : CD = AM : AD = 1-\lambda$, то есть $MQ = (1-\lambda)CD$. Сечение $MNPQ$ будет ромбом, если $MN = MQ$. Подставляя в это равенство найденные выражения для длин сторон параллелограмма получаем $\lambda AB = (1-\lambda)CD$, откуда

$$\lambda = \frac{CD}{AB+CD} = \frac{1}{m+1}.$$

Важные выводы. 1). *Сечение тетраэдра плоскостью, параллельной двум её скрещивающимся рёбрам всегда является параллелограммом.*

2). *Если противоположные рёбра AB и CD тетраэдра перпендикулярны, то параллельные им стороны MN и MQ сечения также перпендикулярны. В этом случае сечение – прямоугольник, а при $\lambda = \frac{1}{m+1}$ – квадрат.*

3). *Если тетраэдр $ABCD$ правильный (как известно, его противоположные рёбра перпендикулярны), то $m=1$ и $\lambda = 1/2$. Значит, сечение, являющееся квадратом, проходит через середины рёбер этого тетраэдра.*

Пример 9. *Построить сечение призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью α, проходящей через точку O пересечения диагоналей AC_1 и CA_1 параллельно плоскости $\beta = (AB_1C)$. Найти отношение площадей сечений призмы плоскостями α и β.*

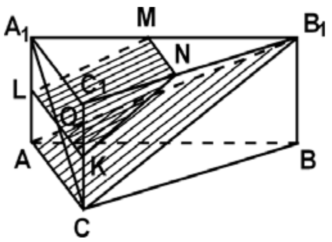


Рис. 10

По условию $\alpha \parallel \beta$, поэтому α и β пересекают грани призмы по параллельным прямым. Следовательно, α пересекает грань AA_1C_1C по отрезку KL, где K и L – середины рёбер CC_1 и AA_1 соответственно (рис. 10), так как $KL \parallel AC$ и KL проходит через точку пересечения диагоналей параллелограмма AA_1C_1C. Аналогично, α пересекает грань AA_1B_1B по отрезку LM, где M – середина ребра A_1B_1.

Аналогично, α пересекает ребро B_1C_1 в его середине N. Сечение – трапеция $KLMN$ ($MN \parallel A_1C_1 \parallel KL$).

Как мы доказали, $LM \parallel AB_1$ и $LK \parallel AC$, поэтому $\angle MLO = \angle B_1AC$, кроме того, $ML : B_1A = OL : CA = 1 : 2$. Следовательно, треугольники MLO и B_1AC подобны с коэффициентом $k = \frac{1}{2}$. Отсюда высота h_1, опущенная из точки M на OL в два раза меньше высоты h, опущенной из точки B_1 на CA. Значит,

$$\frac{S_\alpha}{S_\beta} = \left(\tfrac{1}{2} h_1 \left(MN + KL\right)\right) : \left(\tfrac{1}{2} h \cdot CA\right) = \tfrac{3}{4}.$$

Пример 8. *Построить сечение правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ плоскостью α, проходящей через точки C и M параллельно ребру SD, где M – середина ребра DA. Определить, в каком отношении плоскость α делит высоту пирамиды, а также ребра, которые она пересекает.*

Так как прямая SD параллельна α и SD лежит в плоскости ASD, то α пересекает плоскость ASD по прямой, параллельной SD (рис. 11). Значит α пересекает грань ASD по отрезку MN, где N – середина SA. Аналогично α пересекает плоскость BSD по прямой PQ, параллельной SD, где P – точка пересечения прямых CM и BD, так как $CM \in \alpha$ и $BD \in (BSD)$. Соединив точку Q с точками N и C, получаем искомое сечение $MNCQ$. Как мы показали выше, N – середина ребра AS. Далее, в треугольнике ACD P – точка пересечения медиан ($AO = OC$ и $DM = MA$), поэтому $DP = \dfrac{2}{3}DO = \dfrac{1}{3}DB$. Из подобия треугольников BSD и BQP получаем, что $BQ : BS = BP : BD = 2 : 3$. Наконец, отношение $SX : XO$, где X – точка пересечения SO и плоскости α, т.е. $X = SO \cap PQ$, найдем, воспользовавшись известной из планиметрии теоремой Менелая.

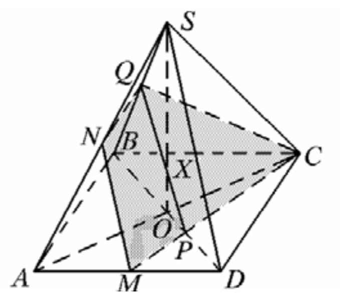


Рис. 11

Теорема (*Менелай*[1]) *Пусть в треугольнике ABC на сторонах BC, CA лежат точки A_1, и B_1 соответственно, а точка C_1 лежит на продолжении стороны AB за точку B; тогда для того, чтобы эти точки лежали на одной прямой, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\boxed{\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_1}{C_1A}=1.} \qquad (*)$$

Доказательство.

Необходимость. Пусть точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой. Проведём прямую BK параллельно прямой AC (см. рис). Тогда треугольники C_1BK и C_1AB_1, а также треугольники BKA_1 и CB_1A_1, подобны (почему?). Запишем это подобие для треугольников C_1BK и C_1AB_1:

$$\frac{BK}{AB_1}=\frac{BC_1}{C_1A}\Rightarrow BK=AB_1\cdot\frac{BC_1}{C_1A}.$$

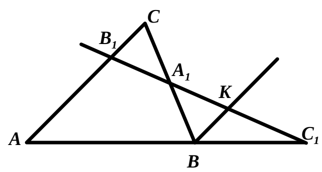
Для треугольников BKA_1 и CB_1A_1:

$$\frac{BK}{B_1C}=\frac{A_1B}{CA_1}\Rightarrow BK=B_1C\cdot\frac{A_1B}{CA_1}.$$

Приравнивая полученные выражения для BK, имеем

$$AB_1\cdot\frac{BC_1}{C_1A}=B_1C\cdot\frac{A_1B}{CA_1}\Rightarrow\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_1}{C_1A}=1.$$

Достаточность. Пусть выполнена формула (*), докажем, что точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой. Пусть прямая B_1A_1 пересекает прямую AB в точке C_2. Тогда, поскольку три точки A_1, B_1 и C_2 лежат на одной прямой, то по только что доказанному: $\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_2}{C_2A}=1$. Из сравнения последней формулы с формулой (*), получаем $\frac{BC_1}{C_1A}=\frac{BC_2}{C_2A}$.



Откуда следует, что точки C_1 и C_2 в одинаковом отношении делят отрезок AB. Следовательно точки C_1 и C_2 совпадают. Теорема доказана.

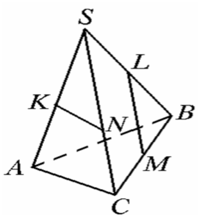
Согласно этой теореме, примененной к треугольнику BSO и прямой

[1]**Менелай** Александрийский (Μενέλαος) (1 в. н. э.) – древнегреческий математик и астроном. Автор работ по сферической тригонометрии: 6 книг о вычислении хорд и 3 книги «Сферики» (сохранились в арабском переводе). Для получения формул сферической геометрии использовал теорему о прямой, пересекающей стороны треугольника.

PXQ, получаем: $\frac{SX}{XO}\cdot\frac{OP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QS}=1$, т.е. $\frac{SX}{XO}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{1}=1$, откуда $\frac{SX}{XO}=2.$

Пример 10. *Плоскость α пересекает ребра AS, SB и BC пирамиды $SABC$. Докажите, что α пересекает ребро CA.*

Первый способ: $\alpha=(KLM)$. Плоскость α делит пространство на два полупространства Π_1 и Π_2. Из условия следует, что если $A\in\Pi_1$, то $S\in\Pi_2$, далее $S\in\Pi_2\Rightarrow B\in\Pi_1\Rightarrow C\in\Pi_2$. Итак, A и C в разных полупространствах, поэтому отрезок AC пересекает α.



Второй способ: Пусть $K=\alpha\cap AS$, $L=\alpha\cap SB$, $M=\alpha\cap BC$. Плоскость α пересекает ребро AS, значит она пересекает грань ASC. Если α не пересекает ребро AC, то она пересекает ребро SC в точке N. Но тогда, по признаку, прямые NK и LM – скрещиваются и не могут лежать в одной плоскости.