§6. Решение уравнений с модулями и параметрами

Рассмотрим несколько уравнений, в которых переменная x стоит под знаком модуля. Напомним, что

© 2007, ФЗФТШ при МФТИ. Составитель Яковлева Тамара Харитоновна.

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ если } x \ge 0, \\ -x, \text{ если } x < 0. \end{cases}$$

Пример 1. Решите уравнение:

а) $|x-2| = 3;$ б) $|x+1| - |2x-3| = 1;$

в) $\dfrac{|x+2|}{|x-1|} + x = 1;$ г) $x^2 - |x| = 6;$ д) $6x^2 - |x+1| = 0.$

а) Если модуль числа равен 3, то это число равно либо 3, либо (-3), т. е. $x-2=3,\ x=5$ или $x-2=-3,\ x=-1$.

б) Из определения модуля следует, что $|x+1| = x+1,$ при $x+1 \ge 0,$ т. е. при $x \ge -1$ и $|x+1| = -x-1$ при $x < -1$. Выражение $|2x-3|$ равно $2x-3,$ если $x \ge \dfrac{3}{2},$ и равно $-2x+3,$ если $x < \dfrac{3}{2}.$

При $x < -1$ данное уравнение равносильно уравнению $-x-1-(-2x+3)=1,$ из которого следует, что $x=5$. Но число 5 не удовлетворяет условию $x < -1,$ следовательно, при $x < -1$ данное уравнение решений не имеет.

При $-1 \le x < \dfrac{3}{2}$ данное уравнение равносильно уравнению $x+1-(-2x+3)=1,$ из которого следует, что $x=1;$ число 1 удовлетворяет условию $-1 \le x < \dfrac{3}{2}.$

При $x \ge \dfrac{3}{2}$ данное уравнение равносильно уравнению $x+1-(-2x-3)=1,$ которое имеет решение $x=3$. А так как число 3 удовлетворяет условию $x \ge \dfrac{3}{2},$ то оно является решением уравнения.

в) Если числитель и знаменатель дроби $\dfrac{x+2}{x-1}$ имеют одинаковые знаки, то дробь положительна, а если разные – то отрицательна, т. е.

$$\left|\frac{x+2}{x-1}\right| = \begin{cases} \dfrac{x+2}{x-1}, \text{ если } x \le -2, \text{ если } x > 1, \\ -\dfrac{x+2}{x-1}, \text{ если } -2 < x < 1. \end{cases}$$

При $x \le -2$ и при $x > 1$ исходное уравнение равносильно уравнению

$$\frac{x+2}{x-1} + x = 1,\ \ x + 2 + x(x+1) = x - 1,\ \ x^2 - x + 3 = 0.$$

Последнее уравнение не имеет решений.

При $-2 < x < 1$ данное уравнение равносильно уравнению

$$-\frac{x+2}{x-1} + x = 1,\ -x - 2 + x^2 - x = x - 1,\ \ x^2 - 3x - 1 = 0.$$

Найдем корни этого уравнения:

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9+4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}.$$

Неравенствам $-2 < x < 1$ удовлетворяет число $\dfrac{3-\sqrt{13}}{2}$, следовательно, это число является решением уравнения.

г) При $x \ge 0$ данное уравнение равносильно уравнению $x^2 - x - 6 = 0$, корнями которого являются числа 3 и -2. Число 3 удовлетворяет условию $x > 0$, а число -2 не удовлетворяет этому условию, следовательно, только число 3 является решением исходного уравнения. При $x < 0$ данное уравнение равносильно уравнению $x^2 + x - 6 = 0$, корнями которого являются числа -3 и 2. Условию $x < 0$ удовлетворяет число -3 и не удовлетворяет число 2.

д) При $x \ge -1$ данное уравнение равносильно уравнению $6x^2 - x - 1 = 0$, находим его корни: $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{25}}{12}$, $x_1 = \dfrac{1}{2}$, $x_2 = -\dfrac{1}{3}$.

Оба корня удовлетворяют условию $x \ge -1$, следовательно, они являются решениями данного уравнения. При $x < -1$ данное уравнение равносильно уравнению $6x^2 + x + 1 = 0$, которое не имеет решений.

Пусть заданы выражения $f(x,a)$ и $g(x,a)$, зависящие от переменных x и a. Тогда уравнение $f(x,a) = g(x,a)$ относительно переменной x называется *уравнением с параметром* a. Решить уравнение с параметром – это значит при любом допустимом значении параметра найти все решения данного уравнения.

Пример 2. Решите уравнение при всех допустимых значениях параметра a:

а) $ax^2-3=4a^2-2x^2$; б) $(a-3)x^2=a^2-9$;

в) $(a-1)x^2+2(a+1)x+(a-2)=0.$

а) При любом значении параметра a данное уравнение равносильно уравнению $(a+2)x^2=4a^2+3.$ Если $a=-2,$ то получаем уравнение $0\cdot x^2=19;$ это уравнение не имеет решений. Если $a\neq-2,$ то $x^2=\dfrac{4a^2+3}{a+2}.$ Выражение $4a^2+3>0$ для любого a; при $a>-2$ имеем два решения: $x_1=\sqrt{\dfrac{4a^2+3}{a+2}}$ и $x_2=-\sqrt{\dfrac{4a^2+3}{a+2}}.$ Если $a+2<0,$ то выражение $\dfrac{4a^2+3}{a+2}<0,$ тогда уравнение не имеет решений.

Ответ: $x=\pm\sqrt{\dfrac{4a^2+3}{a+2}},$ при $a>-2;$ при $a\le-2$ решений нет.

б) Если $a=3,$ то $x\in\mathbb{R}.$ Если $a\neq3,$ то $x^2=a+3.$ Если $a+3=0,$ т. е. если $a=-3,$ то уравнение имеет единственное решение $x=0.$ Если $a<-3,$ то уравнение не имеет решений. Если $a>-3$ и $a\neq3,$ то уравнение имеет два решения: $x_1=\sqrt{a+3}$ и $x_2=-\sqrt{a+3}.$

в) При $a=1$ данное уравнение принимает вид $4x-1=0,$ число $x=\dfrac{1}{4}$ является его решением. При $a\neq1$ данное уравнение является квадратным, его дискриминант D_1 равен

$$(a+1)^2-(a-1)(a-2)=5a-1.$$

Если $5a-1<0,$ т. е. $a<\dfrac{1}{5},$ то данное уравнение не имеет решений.

Если $a=\dfrac{1}{5},$ то уравнение имеет единственное решение

$$x = -\frac{a+1}{a-1} = \frac{\frac{1}{5}+1}{\frac{1}{5}-1} = \frac{3}{2}.$$

Если $a > \frac{1}{5}$ и $a \neq 1,$ то данное уравнение имеет два решения:

$$x = \frac{-(a+1) \pm \sqrt{5a-1}}{a-1}.$$

Ответ: $x = \frac{1}{4}$ при $a = 1$; $x = \frac{3}{2}$ при $a = \frac{1}{5}$; $x = \frac{-(a+1) \pm \sqrt{5a-1}}{a-1}$ при $a > \frac{1}{5}$ и $a \neq 1$; при $a < \frac{1}{5}$ уравнение не имеет решений.

© 2007, ФЗФТШ при МФТИ. Составитель Яковлева Тамара Харитоновна.