§5. Решение уравнений, приводящихся к квадратным

Уравнение

$$ax^4 + bx^2 + c = 0,$$

где a, b, c – некоторые действительные числа, причем $a \neq 0,$ называется *биквадратным уравнением.* Заменой $u = x^2$ это уравнение сводится к квадратному уравнению $au^2 + bu + c = 0.$

Пример 1. Решите биквадратное уравнение

а) $2x^4 - 3x^2 + 1 = 0;$ б) $5x^4 - 7x^2 - 6 = 0;$ в) $7x^4 + 9x^2 + 2 = 0.$

а) Сделаем замену $u = x^2,$ получим квадратное уравнение

$$2u^2 - 3u + 1 = 0.$$

По формуле корней квадратного уравнения находим

$$u = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4}, \text{ т. е. } u_1 = 1, u_2 = \frac{1}{2}.$$

Отсюда следует, что $x^2 = 1$ и $x^2 = \frac{1}{2},$ и поэтому данное уравнение имеет четыре решения: $x_1 = 1,$ $x_2 = -1,$ $x_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}, x_4 = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$

б) После замены $u = x^2$ получаем уравнение $5u^2 - 7u - 6 = 0.$ Находим корни квадратного уравнения:

$$u = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 4 \cdot 5 \cdot 6}}{10} = \frac{7 \pm 13}{10}, \text{ т. е. } u_1 = 2, u_2 = -\frac{3}{5}.$$

Уравнение $x^2 = 2$ имеет два корня: $x_1 = \sqrt{2}$ и $x_2 = -\sqrt{2}.$ Уравнение $x^2 = -\frac{3}{5}$ не имеет решений. Следовательно, данное биквадратное уравнение имеет два решения: $\sqrt{2}$ и $-\sqrt{2}.$

в) Уравнение не имеет решений, т. к. $7x^4 + 9x^2 + 2 \geq 2$ для любого $x \in \mathbb{R}.$

© 2007, ФЗФТШ при МФТИ. Составитель Яковлева Тамара Харитоновна.

Пример 2. Решите уравнение

$$\frac{2x+1}{x-1}+\frac{x+1}{2x+1}=\frac{5x+4}{(x-1)(2x+1)}.$$

Общий знаменатель дробей, входящих в данное уравнение, равен $(x-1)(2x+1)$. Умножив обе части уравнения на $(x-1)(2x+1)$, получим

$$(2x+1)^2+(x+1)(x-1)=5x+4,\ 4x^2+4x+1+x^2-1=5x+4,$$

$$5x^2-x-4=0.$$

Найдем корни полученного квадратного уравнения

$$x=\frac{1\pm\sqrt{1+80}}{10}=\frac{1\pm 9}{10},\ \text{т. е. } x_1=1,\ x_2=-\frac{4}{5}.$$

При $x=1$ не определены обе части уравнения, следовательно, это число не является корнем уравнения. При $x=-\frac{4}{5}$ общий знаменатель в нуль не обращается, следовательно, это число является решением данного уравнения.

Пример 3. Решите уравнение

$$\frac{x^2+2x+7}{x^2+2x+3}=4+2x+x^2.$$

Введем новую переменную $x^2+2x+3=t$, тогда для нахождения t получим уравнение $\frac{t+4}{t}=t+1$. Умножим обе части этого уравнения на t, получим: $t+4=t^2+t,\ t^2=4,\ t_1=2,\ t_2=-2.$

Решаем уравнение:

$$x^2+2x+3=2,\ x^2+2x+1=0,$$

оно имеет единственное решение $x=-1$. Уравнение $x^2+2x+3=-2$, т. е. $x^2+2x+5=0$, решений не имеет. Следовательно, исходное уравнение имеет одно решение $x=-1$.

Пример 4. Решите уравнение

$$(x+2)^2+\frac{24}{x^2+4x}=18.$$

Введем новую переменную $t=(x+2)^2$.

Так как $x^2+4x=x^2+4x+4-4$, то $x^2+4x=t-4$, и для нахождения t получаем уравнение $t+\frac{24}{t-4}=18$. Умножив обе части уравнения на

$t-4,$ получим: $t^2-4t+24=18t-72,\ t^2-22t+96=0.$ Корнями этого квадратного уравнения являются числа 6 и $16.$ Решаем уравнение $(x+2)^2=16,$ и из него следует, что $x+2=\pm 4,$ т. е. $x_1=2$ и $x_2=-6.$

Теперь решаем уравнение $(x+2)^2=6,$ откуда следует, что

$$x_3=-2+\sqrt{6} \text{ и } x_4=-2-\sqrt{6}.$$

Пример 5. Решите уравнение

$$\frac{3x}{3x^2-5x+6}-\frac{4x}{3x^2+x+6}=\frac{7}{20}.$$

Заметим, что число $x=0$ не является решением данного уравнения.

Разделим числитель и знаменатель каждой из дробей, стоящих в левой части уравнения на $x,$ тогда получаем: $\dfrac{3}{3x-5+\frac{6}{x}}-\dfrac{4}{3x+1+\frac{6}{x}}=\dfrac{7}{20}.$

Обозначим $3x+\dfrac{6}{x}=y,$ тогда получаем уравнение для нахождения y:

$$\frac{3}{y-5}-\frac{4}{y+1}=\frac{7}{20},\ 20(3y+3-4y+20)=7(y^2-4y-5),$$

$$-20y+460=7y^2-28y-35,\ 7y^2-8y-495=0,$$

$$D_1=16+7\cdot 495=3481=59^2,\ y=\frac{4\pm 59}{7},\ y_1=9,\ y_2=-\frac{55}{7}.$$

Теперь решаем уравнение $3x+\dfrac{6}{x}=9,\quad 3x^2-9x+6=0,$

$$x^2-3x+2=0,\ x=\frac{3\pm 1}{2},\ x_1=2,\ x_2=1.$$

Решаем уравнение $3x+\dfrac{6}{x}=-\dfrac{55}{7},$

$$21x^2+55x+42=0,\ D=55^2-\ 4\cdot 21\cdot 42=3025-3582<0.$$

Ответ: $1;\ 2.$