§3. Квадратные уравнения

Уравнения вида

$$ax^2+bx+c=0, \qquad (3)$$

где x – переменное, a, b, c – некоторые действительные числа, причем $a \neq 0,$ называется *квадратным уравнением.*

Уравнения $ax^2+bx=0$ и $ax^2+c=0$ при $a \neq 0$ называются *неполными квадратными уравнениями.*

Уравнение $ax^2+bx=0$ при $a\neq 0$ преобразуется к виду $x(ax+b)=0,$ отсюда следует, что решениями полученного уравнения являются числа $x=0$ и $x=-\frac{b}{a}.$

Уравнение $ax^2+c=0$ при $a\neq 0$ равносильно уравнению

$$x^2+\frac{c}{a}=0.$$

Отсюда следует, что при $c=0$ уравнение имеет единственное решение $x=0.$ Если $\frac{c}{a}>0,$ то уравнение не имеет решений, т. к. $x^2+\frac{c}{a}\geq\frac{c}{a},$ т. е. при любых x левая часть уравнения не обращается в нуль. Если $\frac{c}{a}<0,$ то уравнение приводится у виду $\left(x+\sqrt{-\frac{c}{a}}\right)\left(x-\sqrt{-\frac{c}{a}}\right)=0,$ откуда следует, что оно имеет два решения, а именно, $x_1=\sqrt{-\frac{c}{a}}$ и $x_2=-\sqrt{-\frac{c}{a}}.$

Пример 1. Решите уравнение:

$$\text{а) } 5x^2=0;\ \text{б) } 6x^2-5x=0;$$

$$\text{в) } 3x^2+2=0;\ \text{г) } 4x^2-9=0.$$

а) Уравнение имеет одно решение $x=0.$

б) Уравнение приводится к виду $x(6x-5)=0,$ откуда следует, что оно имеет два решения: $x=0$ и $x=\frac{5}{6}.$

в) Уравнение не имеет решений, т. к. левая часть уравнения при любом значении x больше или равна $2.$

г) Преобразуем уравнение к виду $(2x-3)(2x+3)=0,$ откуда следует, что уравнение имеет два решения: $x=\frac{3}{2}$ и $x=-\frac{3}{2}.$

Рассмотрим теперь уравнение (3), где числа a, b и c отличны от нуля. Преобразуем левую часть этого уравнения:

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left(x^2+2\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right)=$$

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right). \qquad (4)$$

Выражение $b^2 - 4ac$ называют *дискриминантом* квадратного уравнения (3) и обозначают буквой D.

Если $D \geq 0,$ то выражение (4) можно разбить на множители

$$a\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{D}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{D}}{2a}\right) = 0.$$

Введем обозначения

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \text{ и } x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}. \qquad (5)$$

Тогда уравнение (3) приводится к виду

$$a(x - x_1)(x - x_2) = 0. \qquad (6)$$

Отсюда следует, что числа x_1 и x_2 являются корнями уравнения (3).

Формулу (5) для нахождения корней уравнения (3) обычно записывают одной формулой

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \qquad (7)$$

Если $D = 0,$ то $x_1 = x_2,$ т. е. корни уравнения совпадают, и уравнение (3) приводится к виду $a(x - x_1)^2 = 0.$

Если $D < 0,$ то $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a^2} \geq -\frac{D}{4a^2} > 0$ для любого $x,$ поэтому в этом случае уравнение (3) не имеет корней.

Пример 2. Решите квадратное уравнение:

а) $2x^2 + 3x - 5 = 0;$ б) $3x^2 + 4x + 2 = 0;$

в) $9x^2 - 6x + 1 = 0;$ г) $\sqrt{2}x^2 - \sqrt{3}x - \sqrt{2} = 0.$

а) Сначала найдем дискриминант данного квадратного уравнения:

$$D = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-5) = 9 + 40 = 49.$$

Так как $D = 49 > 0,$ то по формуле (7) находим:

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{49}}{4} = \frac{-3 \pm 7}{4}.$$

Следовательно, данное уравнение имеет корни $x_1 = 1$ и $x_2 = -\frac{5}{2}.$

б) Так как $D = 4^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 16 - 24 = -8 < 0,$ то данное уравнение не имеет действительных корней.

в) Так как $D = 6^2 - 4 \cdot 9 \cdot 1 = 0,$ то данное уравнение имеет единственный корень $x = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}.$

г) $D = 3 - 4 \cdot \sqrt{2}\left(-\sqrt{2}\right) = 11.$

$$x_1 = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{11}}{2\sqrt{2}} \text{ и } x_2 = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{11}}{2\sqrt{2}}.$$

Если в уравнении (3) число $b = 2b_1$, то формула (7) принимает вид

$$x = \frac{-2b_1 \pm \sqrt{4b_1^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b_1 \pm \sqrt{b_1^2 - ac}}{a}. \qquad (8)$$

В формуле (8) число b_1 равно половине коэффициента при x в уравнении (3).

Выражение $b_1^2 - ac$ обозначают через D_1. Следовательно, корни квадратного уравнения $ax^2 + 2b_1x + c = 0$ определяются по формуле

$$x = \frac{-b_1 \pm \sqrt{D_1}}{a}, \text{ если } D_1 = b_1^2 - ac \geq 0.$$

Пример 3. Решите квадратное уравнение:

а) $3x^2 - 4x - 1 = 0;$ б) $2x^2 + 2x + 5 = 0.$

а) $D_1 = 2^2 - 3(-1) = 7 > 0.$ По формуле (8) имеем:

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{7}}{3}, \text{ т. е. } x_1 = \frac{2 + \sqrt{7}}{3} \text{ и } x_2 = \frac{2 - \sqrt{7}}{3}.$$

б) $D_1 = 1^2 - 2 \cdot 5 = -9 < 0.$ Уравнение не имеет решений.

Пример 4. Определить, какие из ниже приведенных уравнений являются равносильными:

а) $6x^2 + x - 1 = 0$ и $\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right) = 0,$

б) $2x - 6 = 0$ и $x^2 - 6x + 9 = 0,$

в) $x^2 + x + 1 = 0$ и $x^2 - x + 1 = 0,$

г) $x + 1 = 0$ и $2x^2 + x - 1 = 0.$

а) Первое уравнение имеет два решения:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{12} = \frac{-1 \pm 5}{12};\ x_1 = \frac{1}{3},\ x_2 = -\frac{1}{2}.$$

Эти и только эти числа являются корнями второго уравнения, следовательно, данные уравнения равносильны.

б) Первое уравнение имеет одно решение $x = 3$. Второе уравнение приводится к виду $(x-3)^2 = 0$, т. е. тоже имеет только одно решение $x = 3$. Следовательно, данные уравнения равносильны.

в) Для обоих уравнений дискриминант равен $1 - 4 = -3 < 0$, следовательно, оба уравнения не имеют решений, а потому они равносильны.

г) Первое уравнение имеет одно решение $x = -1$, а второе уравнение имеет два решения $x_1 = \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2}$ и $x_2 = \frac{-1-3}{4} = -1$. Число $\frac{1}{2}$ является решением второго уравнения и не является решением первого уравнения. Следовательно, данные уравнения не равносильны.

Пример 5. Найдите все простые p и q такие, что уравнение $x^2 - px - q = 0$ имеет простой корень.

Предположим, что $x = n$ является простым корнем, тогда выполняется условие $n^2 - pn - q = 0$, откуда следует, что $q = n(n - p)$. Так как число q простое и n простое, то $n - p = 1$, т. е. $n = p + 1, q = p + 1$. Число p может равняться только 2, т. к. в любом другом случае $p + 1$ будет четным, и тогда число q не будет простым числом.

Следовательно, искомое квадратное уравнение имеет вид $x^2 - 2x - 3 = 0$.

Выражение $ax^2 + bx + c$, где x – переменная, a, b, c – числа, причем $a \neq 0$, называется квадратным трехчленом. Если квадратное уравнение $ax^2 + bx + c$ имеет различные корни x_1 и x_2, то квадратный трехчлен раскладывается на множители $a(x - x_1)(x - x_2)$, а если корни совпадают, то квадратный трехчлен представим в виде $a(x - x_1)^2$. Если же уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ не имеет корней, то квадратный трехчлен не раскладывается на множители.

Пример 6. Разложите на множители квадратный трехчлен

$$21x^2 - 4x - 1.$$

Решаем квадратное уравнение $21x^2 - 4x - 1 = 0,\ D_1 = 4 + 21 = 25,$

$$x = \frac{2 \pm 5}{21},\ x_1 = \frac{1}{3},\ x_2 = -\frac{1}{7}.$$

Отсюда следует, что $21x^2-4x-1=21\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{7}\right).$

Пример 7. Сократите дробь $\dfrac{24x^2+x-10}{56x^2-59x+15}.$

Разложим на множители числитель дроби, для этого решаем квадратное уравнение $24x^2+x-10=0$, $D=1+960=961=31^2$, $x=\dfrac{-1\pm 31}{48}$,

$$x_1=\frac{30}{48}=\frac{5}{8},\ x_2=-\frac{2}{3},\ 24x^2+x-10=24\left(x-\frac{5}{8}\right)\left(x+\frac{2}{3}\right).$$

Теперь решим уравнение $56x^2-59x+15=0$, $D=59^2-4\cdot 56\cdot 15=$ $=3481-3360=121=11^2$, $x=\dfrac{59\pm 11}{112}$, $x_1=\dfrac{70}{112}=\dfrac{5}{8}$, $x_2=\dfrac{48}{112}=\dfrac{3}{7}$, следовательно, $56x^2-59x+15=56\left(x-\frac{5}{8}\right)\left(x-\frac{3}{7}\right).$

Получаем: $\dfrac{24x^2+x-10}{56x^2-59x+15}=\dfrac{24\left(x-\frac{5}{8}\right)\left(x+\frac{2}{3}\right)}{56\left(x-\frac{5}{8}\right)\left(x-\frac{3}{7}\right)}=\dfrac{3\left(x+\frac{2}{3}\right)}{7\left(x-\frac{3}{7}\right)}=\dfrac{3x+2}{7x-3}.$

Пример 8. а) Найти наименьшее значение квадратного трехчлена

$$3x^2-5x+1;$$

б) Найти наибольшее значение квадратного трехчлена

$$-7x^2+3x+5.$$

а) Преобразуем данный квадратный трехчлен, пользуясь методом выделения квадрата двучлена:

$$3x^2-5x+1=3\left(x^2-\frac{5}{3}x\right)+1=3\left(x^2-2\cdot\frac{5}{6}\cdot x+\left(\frac{5}{6}\right)^2-\left(\frac{5}{6}\right)^2\right)+1=$$

$$=3\left(x-\frac{5}{6}\right)^2-\frac{3\cdot 5^2}{6^2}+1=3\left(x-\frac{5}{6}\right)^2-\frac{25}{12}+1=3\left(x-\frac{5}{6}\right)^2-\frac{13}{12}.$$

Отсюда видно, что при $x=\dfrac{5}{6}$ квадратный трехчлен принимает значение $\left(-\dfrac{13}{12}\right)$, а для любого $x\neq\dfrac{5}{6}$ к числу $-\dfrac{13}{12}$ будет прибавляться положительное число, равное $3\left(x-\frac{5}{6}\right)^2$, следовательно, число $-\frac{13}{12}$ является наименьшим значением данного квадратного трехчлена.

б) Выделяем квадрат двучлена, получаем:

$$-7x^2+3x+5=-7\left(x^2-\frac{3}{7}x\right)+5=-7\left(x^2-2\cdot\frac{3}{14}\cdot x+\left(\frac{3}{14}\right)^2-\left(\frac{3}{14}\right)^2\right)+5=$$

$$=-3\left(x-\frac{3}{14}\right)^2+7\cdot\frac{9}{14^2}+5=-7\left(x-\frac{3}{14}\right)^2+\frac{9}{28}+5=-7\left(x-\frac{3}{14}\right)^2+5\frac{9}{28}.$$

При $x=\frac{3}{14}$ квадратный трехчлен будет принимать значение, равное $5\frac{9}{28}$, при $x\neq\frac{3}{14}$ из числа $5\frac{9}{28}$ будет вычитаться число $7\left(x-\frac{3}{14}\right)^2$, поэтому число $5\frac{9}{28}$ является наибольшим значением данного квадратного трехчлена.

