

§2. Линейное уравнение

Уравнение вида

$$ax = b, \quad (2)$$

где a и b – некоторые заданные действительные числа, называется *линейным уравнением*.

Если $a \neq 0$, то уравнение (2) имеет единственное решение $x = \frac{b}{a}$.

Если $a = 0$, а $b \neq 0$, то уравнение (2) не имеет решений.

Если $a = 0$ и $b = 0$, то решением этого уравнения является любое действительное число.

Пример 1. Решите уравнение

а) $2x + 5 = 3x + 2$;

б) $2(x + 3) = x + (x + 3)$;

в) $3(x + 1) + 5 = 2x + (x + 8)$.

а) Перенесем слагаемое $3x$ в левую часть уравнения, а слагаемое 5 в правую, при этом меняем их знаки: $2x - 3x = 2 - 5$.

Это уравнение имеет единственное решение $x = 3$, следовательно, исходное уравнение также имеет единственное решение.

б) Раскрываем скобки и переносим слагаемые, содержащие x , из правой части уравнения в левую часть, а слагаемое 6 – в правую часть уравнения, при этом не забываем поменять знаки этих слагаемых, в результате получаем: $2x - 2x = 3 - 6$. Данное уравнение равносильно уравнению $0 \cdot x = -3$, которое не имеет решений, следовательно, исходное уравнение также не имеет решений.

в) Преобразуем данное уравнение: $3x + 8 = 3x + 8$. Любое действительное число удовлетворяет полученному уравнению, следовательно, и данному уравнению удовлетворяет любое действительное число.

Пример 2. Выясните, какие из ниже приведенных уравнений являются равносильными:

а) $2x + 1 = 7x - 9$ и $3(2x + 1) = 7x + 1$;

б) $3x + 5 = x + 7$ и $2x - (x + 3) = x - 1$.

а) Первое уравнение равносильно уравнению $2x - 7x = -1 - 9$, его решением является число $x = 2$. Второе уравнение равносильно уравнению $6x - 7x = -3 + 1$, его решением является единственное число $x = 2$. Следовательно, данные уравнения равносильны.

б) Единственным решением первого уравнения является число $x = 1$. Второе уравнение равносильно уравнению $0 \cdot x = 2$, которое не имеет решений. Следовательно, данные уравнения не являются равносильными.