

**Федеральное агентство по образованию
Федеральная заочная физико-техническая школа
при Московском физико – техническом институте
(государственном университете)**

ФИЗИКА

Движение материальной точки по окружности

Задание №6 для 9-х классов

(2006-2007 учебный год)



г. Долгопрудный, 2007

Составитель: В.И. Плис, доцент кафедры общей физики МФТИ.

Физика: задание №6 для 9-х классов (2006-2007 учебный год). - М.: МФТИ, 2007, 24с.

Составитель:

Плис Валерий Иванович

Изд. лиц. №040060 от 21.08.96г. Подписано 29.03.07

Формат 60x90 1/16. Бумага типографская. Печать офсетная. Усл. печ. л. 1,5

Уч.-изд. л. 1,33. Тираж 1600. Заказ №16-з.

Федеральная заочная физико-техническая школа
Московский физико-технический институт
(государственный университет)
«ФИЗТЕХ-ПОЛИГРАФ»

141700, Москов. обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
ФЗФТШ при МФТИ, тел/факс (495) 408-5145 – **заочное отделение**
тел./факс (495) 409-9351 – **очно-заочное отделение**
тел. 409-9583 – **очное отделение**

E.mail: zftsh@pop3.mipt.ru

Наш сайт: www.school.mipt.ru

© ФЗФТШ при МФТИ, 2007

§1. Кинематика движения точки по окружности

1.1 Линейная и угловая скорости

Важным частным случаем движения материальной точки по заданной траектории является движение по окружности. Рассмотрим движение материальной точки M по окружности радиуса R с центром в точке O .

В произвольный момент времени t положение точки на окружности однозначно определяется углом $\varphi(t)$, который радиус-вектор $\vec{r}(t)$ точки M образует с направлением начала отсчета углов (рис.1). Таким направлением будем считать направление OA . Другим способом задания положения точки на окружности является задание длины $S(t)$

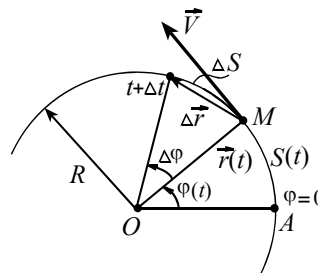


Рис. 1

дуги AM . Оба способа задания положения точки на окружности эквивалентны, так как угловая $\varphi(t)$ и дуговая $S(t)$ координаты связаны

определением радианной меры угла $\varphi(t) = \frac{S(t)}{R}$.

Рассмотрим перемещение $\Delta \vec{r} = \vec{V} \Delta t$ точки M за малый промежуток времени Δt . Это перемещение стягивается дугой длины $\Delta S \approx |\Delta \vec{r}| = |\vec{V}| \Delta t$, а радиус-вектор точки M поворачивается при этом на угол $\Delta \varphi$. На такой же угол поворачивается и вектор скорости, так как скорость \vec{V} перпендикулярна \vec{r} – радиусу – вектору точки.

Линейной скоростью $V(t)$ точки называют отношение длины ΔS дуги к времени Δt перемещения (при $\Delta t \rightarrow 0$)

$$V(t) = \frac{\Delta S}{\Delta t}. \quad (1)$$

Линейная скорость точки есть модуль (величина) вектора скорости. В системе СИ линейную скорость измеряют в м/с (метр в секунду).

Угловой скоростью $\omega(t)$ радиуса-вектора точки называют отношение угла $\Delta \varphi$ поворота радиуса-вектора к времени Δt , за которое этот поворот был совершен (при $\Delta t \rightarrow 0$),

$$\omega(t) = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}. \quad (2)$$

С такой же угловой скоростью вращается и вектор скорости точки, так как линейная скорость $\vec{V} \perp \vec{r}$ – радиусу-вектору точки. В системе СИ угловую скорость измеряют в рад/с (радиан в секунду).

Следует отметить, что в учебных пособиях угловую скорость радиуса-вектора точки часто называют просто угловой скоростью, а в качестве единицы измерения угловой скорости указывают $1/c$ (обратную секунду, c^{-1}): последнее обусловлено тем, что радиан – величина безразмерная.

Замечая, что $\Delta\varphi(t) = \frac{\Delta S(t)}{R}$, приходим с учетом (1) и (2) к соотношению, связывающему линейную $V(t)$ и угловую $\omega(t)$ скорости при произвольном движении материальной точки по окружности радиуса R

$$V(t) = \omega(t) \cdot R. \quad (3)$$

1.2. Равномерное движение по окружности.

Период и частота обращения

Движение по окружности с постоянной по модулю скоростью называют равномерным движением по окружности. Из (3) следует, что при таком движении угловая скорость ω тоже постоянна. В этом случае ее называют также циклической частотой.

Для описания равномерного движения по окружности наряду с циклической частотой ω удобно использовать *период обращения* T , определяемый как время, в течение которого совершается один полный оборот, и *частоту обращения* ν

$$\nu = \frac{1}{T},$$

которая численно равна числу оборотов радиуса-вектора точки за единицу времени. В связи с этим говорят, что частота ν измеряется в оборотах в секунду.

Из определения (2) угловой скорости следует, что при равномерном движении по окружности величины ω , T и ν связаны соотношениями

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu. \quad (4)$$

Размерности ω и ν одинаковы ($1/c$), так как эти величины различаются лишь числовым множителем 2π .

Рассмотрим два примера, иллюстрирующих применение введенных величин.

Пример 1. Считая, что Земля движется вокруг Солнца по круговой орбите радиуса $R = 150$ млн.км, найдите линейную скорость V Земли в ее годичном движении вокруг Солнца.

Решение. Будем считать, что Земля совершает один полный оборот вокруг Солнца за 365 суток. Тогда период обращения Земли $T = 3,15 \cdot 10^7$ с. Далее из (3) и (4) находим

$$V = \frac{2\pi}{T} R = \frac{2 \cdot 3,14}{3,15 \cdot 10^7} \cdot 150 \cdot 10^9 \approx 30 \cdot 10^3 \text{ м/с.}$$

Пример 2. Рельсы игрушечной железной дороги образуют кольцо радиуса R . Вагончик M перемещается по рельсам, подталкиваемый стержнем AB , который вращается с постоянной угловой скоростью ω_1 вокруг точки A , лежащей внутри кольца почти у самых рельсов (рис. 2). Как зависит от времени линейная скорость $V(t)$ вагончика?

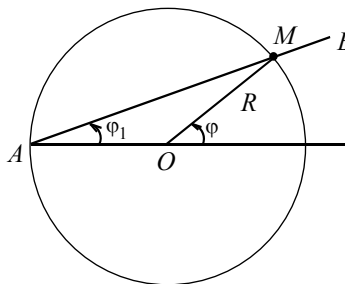


Рис. 2

Решение. Будем считать, что угол φ_1 отсчитывается от направления, задаваемого диаметром AO (точка O – центр окружности, по которой движется вагончик). Стержень вращается с постоянной угловой скоростью ω_1 , следовательно угол φ_1 растет со временем по линейному закону $\varphi_1 = \omega_1 t$. Найдем зависимость от времени t угла φ поворота радиуса-вектора вагончика. Для этого заметим, что треугольник AOM равнобедренный, тогда $\angle AMO = \varphi_1$. Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних, с ним несмежных, отсюда $\varphi = 2\varphi_1 = 2\omega_1 t$. Заметим, что угол $\varphi(t)$ растет со временем по линейному закону, и что угловая скорость ω вагончика при движении по рельсам постоянна и вдвое больше угловой скорости ω_1 , с которой вращается стержень, т.е. $\omega = 2\omega_1$. Следовательно, вагончик движется по окружности равномерно, его линейная скорость от времени не зависит и равна

$$V = \omega \cdot R = 2 \cdot \omega_1 \cdot R.$$

1.3. Ускорение при равномерном движении по окружности

По определению ускорение \vec{a} материальной точки есть векторная величина, равная отношению приращения вектора скорости ко времени, за которое произошло это приращение,

$$\vec{a}(t) = \frac{\vec{V}(t + \Delta t) - \vec{V}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} \quad (\text{при } \Delta t \rightarrow 0). \quad (5)$$

Найдем величину и направление ускорения \vec{a} точки при равномерном движении по окружности. Допустим, что при этом движении радиус-вектор точки за время от t до $t + \Delta t$ совершил поворот на угол $\Delta\varphi$ (рис.3). Из равнобедренного треугольника, иллюстрирующего соотношение $\Delta \vec{V} = \vec{V}(t + \Delta t) - \vec{V}(t)$, найдем величину приращения вектора

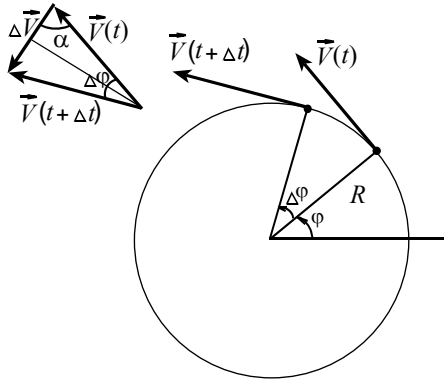


Рис. 3

равномерном движении по окружности

$$a = |\vec{a}(t)| = \frac{|\Delta \vec{V}|}{\Delta t} = \frac{V \cdot \Delta\varphi}{\Delta t} = V \cdot \omega.$$

С учетом (3) и (4) последнее соотношение можно также представить в виде

$$a = \omega \cdot V = \frac{V^2}{R} = \omega^2 R = 4 \cdot \pi^2 \cdot \nu^2 \cdot R. \quad (6)$$

Установим направление вектора \vec{a} . Из (5) следует, что ускорение \vec{a} и приращение $\Delta \vec{V}$ скорости – сонаправленные векторы. При $\Delta t \rightarrow 0$

ускорения, обусловленного только изменением направления (вращением) вектора скорости

$$|\Delta \vec{V}| = 2 \cdot V \cdot \sin \frac{\Delta\varphi}{2} \approx V \cdot \Delta\varphi,$$

здесь учтено, что при малых аргументах, т.е. при $|x| \ll 1$ выполняется приближенное равенство $\sin x \approx x$, где x выражен в радианной мере. Тогда из соотношения (5) находим величину a вектора ускорения точки при равномерном

угол $\Delta\varphi \rightarrow 0$ и $\alpha = \left(\frac{\pi}{2} - \Delta\varphi\right) \rightarrow \frac{\pi}{2}$, следовательно в любой момент

времени векторы \vec{V} и \vec{a} взаимно перпендикулярны, при этом вектор ускорения направлен по радиусу к центру окружности и с радиусом-вектором $\vec{r}(t)$ точки связан соотношением (рис. 4)

$$\vec{a}(t) = -\omega^2 \cdot \vec{r}(t). \quad (7)$$

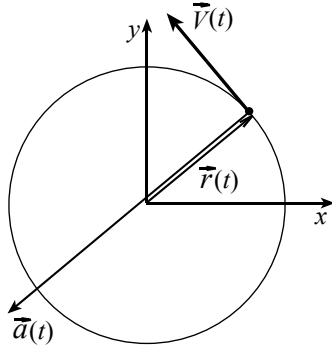


Рис. 4

Так как вектор ускорения направлен к центру окружности, то такое ускорение называют центростремительным (радиальным, нормальным, т. е. направленным по внутренней нормали к траектории). Подчеркнем, что величина центростремительного ускорения (как видно из вывода) характеризует угловую скорость вращения вектора скорости.

Сформулируем вывод, движение точки по окружности с постоянной по величине скоростью есть движение ускоренное, при этом вектор ускорения в любой момент времени направлен к центру окружности, а его величина постоянна и определяется из (6).

Пример № 3. Найдите скорость \vec{V} и ускорение \vec{a} точек земной поверхности на широте $\varphi = 60^\circ$, обусловленные участием в суточном вращении Земли. Радиус Земли $R = 6350$ км.

Решение. Выберем указанную на рис. 5 систему отсчета. Начало отсчета поместим в центр Земли, плоскость XU совпадает с плоскостью экватора, ось Z совпадает с осью вращения планеты. В выбранной системе отсчета любая точка земной поверхности на широте φ движется равномерно по окружности радиуса $r = R \cos \varphi$ с периодом в одни сутки, т.е. $T = 86400$ с. Скорость любой точки направлена по касательной к такой окружности, а ускорение к ее центру. Величины векторов скорости и ускорения найдем из (3) и (6)

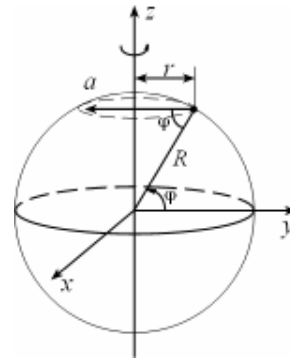


Рис. 5

$$V = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi R \cos \varphi}{T} \approx 230 \text{ м/с},$$

$$a = \omega^2 r = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R \cos \varphi \approx 0,17 \text{ м/с}^2.$$

1.4. Ускорение при неравномерном движении по окружности

При неравномерном движении по окружности изменяется со временем не только направление вектора \vec{V} скорости, но и его модуль V . В этом случае приращение $\Delta\vec{V}$ вектора скорости (рис. 6) может быть представлено в виде суммы двух взаимно перпендикулярных составляющих $\Delta\vec{V} = \Delta\vec{V}_\tau + \Delta\vec{V}_n$, где $\Delta\vec{V}_\tau$ – составляющая приращения скорости, сонаправленная с вектором скорости \vec{V} , и обусловленная приращением величины вектора скорости на $\Delta V_\tau = \Delta V = |\Delta\vec{V}| \cos \theta$; вторая составляющая $\Delta\vec{V}_n$ – нормальная (нами уже изучена), обусловлена (как и прежде) поворотом вектора скорости. Тогда естественно и ускорение представить в виде суммы касательной (тангенциальной) и нормальной составляющих

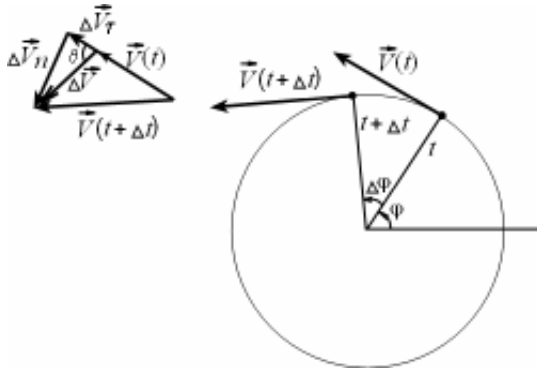


Рис.6
нормальной составляющих

$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{V}_\tau}{\Delta t} + \frac{\Delta\vec{V}_n}{\Delta t} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n. \quad (8)$$

Для проекций вектора ускорения на касательное и нормальное направления справедливы соотношения

$$a_\tau = \frac{\Delta V}{\Delta t}, (\Delta t \rightarrow 0), \quad a_n = \omega \cdot V = \frac{V^2}{R}. \quad (9)$$

Отметим, что касательная составляющая a_τ ускорения определяется скоростью изменения модуля вектора скорости, в свою очередь нормальная (радиальная) составляющая a_n связана с угловой скоростью вращения вектора скорости. По теореме Пифагора

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}. \quad (10)$$

Отметим, что движение по произвольной криволинейной траектории может быть представлено как последовательность перемещений по элементарным дужкам окружностей. Тогда соотношения (9), (10) справедливы и при неравномерном движении материальной точки по произвольной криволинейной траектории, при этом величину R в формуле (9) для a_n называют радиусом кривизны траектории в рассматриваемой точке. Иначе говоря, это радиус элементарной дужки окружности, с которой в первом приближении совпадает траектория материальной точки в малой окрестности того места, где эта точка в данный момент находится.

В заключение отметим, что при неравномерном движении по окружности угловая скорость ω зависит от времени. Скорость изменения ω со временем называют угловым ускорением ε , которое вводится

по формуле
$$\varepsilon = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \quad (\text{при } \Delta t \rightarrow 0). \quad (11)$$

Из (9) и (11) следует, что тангенциальная составляющая a_τ ускорения материальной точки и угловое ускорение ε связаны соотношением

$$a_\tau = \frac{\Delta V}{\Delta t} = R \cdot \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = R \cdot \varepsilon. \quad (12)$$

Пример № 4. Материальная точка движется по окружности радиуса R с постоянным угловым ускорением ε . Найдите зависимости от времени величин скорости V и ускорения a . В начальный момент времени точка покоилась.

Решение. Так как угловое ускорение постоянно, то угловая скорость будет увеличиваться со временем по линейному закону

$$\omega(t) = \omega(0) + \varepsilon \cdot t = \varepsilon \cdot t. \quad (13)$$

Из (3) с учетом (13) находим $V(t) = R \cdot \omega(t) = R \cdot \varepsilon \cdot t$

Далее из соотношений (9), (12) и (13) находим проекции вектора ускорения на направления: тангенциальное $a_\tau = R \cdot \varepsilon$, нормальное

$a_n = \omega^2 R = (\varepsilon \cdot t)^2 R$, и величину (модуль) ускорения

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \varepsilon \cdot R \cdot \sqrt{1 + \varepsilon^2 t^4}.$$

Пример № 5. Камень брошен со скоростью V_0 под углом α к горизонту. В малой окрестности точки старта найдите радиус R кривизны

траектории и угловую скорость ω вращения вектора скорости.

Решение. Для решения задачи воспользуемся соотношениями

$$R = \frac{V^2}{a_n}, \quad \omega = \frac{a_n}{V}. \quad (\text{см. (9)}).$$

В малой окрестности точки старта (рис. 7) $V = V_0$, нормальное ускорение a_n есть проекция ускорения свободного падения \vec{g} на нормаль к траектории $a_n = g \cdot \cos \alpha$.

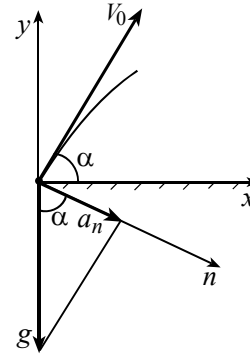


Рис. 7

Из приведенных соотношений находим

$$R = \frac{V_0^2}{g \cos \alpha}, \quad \omega = \frac{g \cos \alpha}{V_0}.$$

§2. Динамика движения по окружности

В инерциальной системе отсчета основным уравнением динамики материальной точки является второй закон Ньютона

$$m \vec{a} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots \quad (14)$$

Рассмотрим подробнее равномерное движение тела по окружности, лежащей в плоскости XOY координатной системы. Из (7) и (14) следует, что при таком движении сумма сил, так же как и ускорение, в любой момент времени направлена к центру окружности. Тогда, переходя в (14) к скалярной форме записи, удобно перейти не к проекциям сил и ускорения на оси OX , OY инерциальной системы отсчета, а на подвижное направление – направление внутренней нормали, считая положительным направление к центру окружности. Это приводит к соотношению

$$m a_n = m \frac{V^2}{R} = F_{1n} + F_{2n} + \dots \quad (15)$$

В рассматриваемом случае движение происходит в плоскости XOY . Тогда $a_z = 0$ и из (14) находим, что сумма проекций сил на направление OZ , перпендикулярное плоскости окружности, равна нулю

$$0 = F_{1z} + F_{2z} + \dots \quad (16)$$

Таким образом, для решения задач динамики равномерного движения материальной точки по окружности необходимо:

1. в инерциальной системе отсчета привести «моментальную фотографию» движущегося тела и указать приложенные к нему силы и сообщаемое этими силами ускорение,
2. составить уравнения (14) – (16) и решить полученную систему.

Отметим, что из (15) следует – *произведение массы тела на нормальное (радиальное, центростремительное) ускорение равно сумме нормальных проекций всех действующих на тело сил.* Эту сумму, стоящую в правой части (15), часто неудачно называют центростремительной силой. Из (14) видно, что никакой центростремительной силы в природе не существует. В инерциальной системе отсчета движение по окружности всегда происходит под действием сил, обусловленных известными взаимодействиями. Такими силами являются силы тяжести, трения, реакции опоры и т.д.

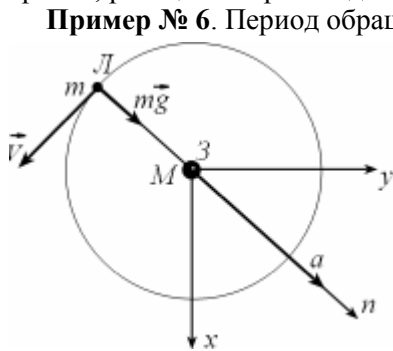


Рис. 8

Пример № 6. Период обращения Луны вокруг Земли в геоцентрической системе отсчета равен $T = 27,32$ суток. Зная радиус Земли $R = 6350$ км и ускорение свободного падения у ее поверхности $g = 10$ м/с², найдите расстояние r до Луны.

Решение. Будем считать, что Луна движется вокруг Земли по круговой орбите радиуса r под действием силы притяжения к Земле. Тогда из второго закона Ньютона (рис. 8) $m\vec{a} = m\vec{g}(r)$,

переходя к проекциям силы притяжения и ускорения на нормальное направление, получаем

$$m \frac{V^2}{r} = G \frac{mM}{r^2}, \quad V^2 = G \frac{M}{R^2} \frac{R^2}{r^2} = g \frac{R^2}{r^2}.$$

Линейная скорость связана с периодом обращения и радиусом орбиты $V = \frac{2\pi r}{T}$. Из двух последних соотношений находим

$$r = \left(\frac{gR^2T^2}{4\pi^2} \right)^{1/3} \approx 3,83 \cdot 10^5 \text{ км.}$$

Пример № 7. Автомобиль движется в горизонтальной плоскости

с постоянной по модулю скоростью по закруглению дороги – дуге окружности радиуса $R = 200$ м. Коэффициент трения скольжения шин по дороге $\mu = 0,1$. При какой скорости V автомобиля его не будет «заносить»? Ускорение свободного падения $g = 10 \text{ м/с}^2$.

Решение. Инерциальная система отсчета и силы, действующие на автомобиль, показаны на (рис. 9). Такими силами являются: сила трения \vec{F}_{TP} , сила сопротивления \vec{F}_C , сила тяжести $m\vec{g}$ и сила нормальной реакции \vec{N} .

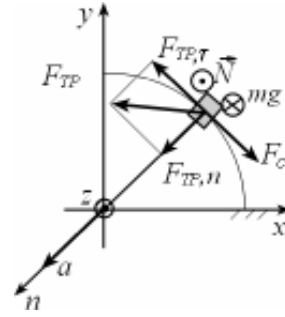


Рис. 9

По второму закону Ньютона $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_C + \vec{F}_{TP}$.

Так как автомобиль движется равномерно $\vec{F}_{TP,\tau} = -\vec{F}_C$. Перейдем к проекциям сил и ускорения на нормальное направление

$$m \frac{V^2}{R} = F_{TP,n} \quad (17)$$

и на вертикаль

$$0 = N - mg. \quad (18)$$

Величина силы трения ограничена $F_{TP} \leq \mu N$. Тогда из (17), (18) следует, что при движении по окружности в горизонтальной плоскости

$$m \frac{V^2}{R} \leq \mu mg.$$

Отсюда находим верхнюю оценку для скорости такого движения $V \leq \sqrt{\mu g R} = \sqrt{0,1 \cdot 10 \cdot 200} \approx 14 \text{ м/с}$.

Пример № 8. Автомобиль, трогаясь с места, равномерно набирает скорость, двигаясь по горизонтальному участку дороги, представляющему собой дугу в $1/12$ окружности радиуса $R = 100$ м. С какой наибольшей по величине V скоростью автомобиль может выехать на прямолинейный участок дороги, если коэффициент трения скольжения шин по дорожному покрытию $\mu = 0,3$? Ускорение свободного падения $g = 10 \text{ м/с}^2$. Силу сопротивления считайте пренебрежимо малой.

Решение. На автомобиль в процессе разгона действуют силы: тяжести $m\vec{g}$, нормальной реакции \vec{N} и трения \vec{F}_{TP} , которая сонаправлена с ускорением \vec{a} . Проанализируем изменение вектора ускорения со вре-

менем. Для этого удобно обратиться к тангенциальной a_τ и нормальной a_n составляющим ускорения. По условию a_τ постоянна, следовательно величина скорости автомобиля в конце разгона и тангенциальная составляющая a_τ связаны соотношением

$$V = \sqrt{2a_\tau s} = \sqrt{2a_\tau \frac{2\pi R}{12}}, \text{ отсюда } a_\tau = \frac{3V^2}{\pi R}.$$

Центростремительная составляющая ускорения определяется формулой $a_n = \frac{V^2}{R}$. Обе составляющие достигают наибольшего значения в конце участка разгона, где скорость наибольшая. По теореме Пифагора

$$a_{\max} = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{V^2}{R}\right)^2 + \left(\frac{3V^2}{\pi R}\right)^2} = \frac{V^2}{R} \sqrt{1 + \left(\frac{3}{\pi}\right)^2}.$$

Из второго закона Ньютона следует $N = mg$, а сила трения может сообщить наибольшее по величине ускорение

$$a_{\max} = \frac{F_{TP, \max}}{m} = \frac{\mu N}{m} = \mu g.$$

Тогда наибольшая скорость в конце участка разгона равна

$$V = \sqrt{\frac{\mu g R}{\sqrt{1 + \left(\frac{3}{\pi}\right)^2}}} \approx 15 \text{ м/с}.$$

Пример № 9. Массивный шарик, подвешенный на легкой нити, движется равномерно по окружности в горизонтальной плоскости (рис.10). Расстояние от точки подвеса нити до плоскости, в которой происходит движение, равно H . Найдите период T обращения шарика. Ускорение свободного падения $g = 10 \text{ м/с}^2$.

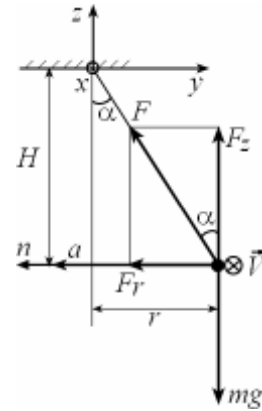


Рис. 10

Решение. Введем обозначения: L – длина нити, α – угол, образуемый нитью с вертикалью, $r = L \sin \alpha$ – радиус окружности, по которой движется шарик со скоростью V . Заметим, что $H = L \cos \alpha$. Обратимся к

динамике. На шарик действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила натяжения \vec{F} нити. Эти силы сообщают шару направленное к центру окружности нормальное ускорение, по величине равное $a = \frac{4\pi^2}{T^2}r$. По второму за-

кону Ньютона $m\vec{a} = \vec{F} + m\vec{g}$, переходя к проекциям сил и ускорения на нормальное направление и на вертикаль, получаем

$$m \cdot \frac{4\pi^2}{T^2} r = F \sin \alpha, \quad (19)$$

$$0 = F \cos \alpha - mg. \quad (20)$$

С учетом (20) преобразуем (19) к виду

$$m \frac{4\pi^2}{T^2} L \sin \alpha = mg \cdot \operatorname{tg} \alpha, \text{ отсюда } T = 2\pi \sqrt{\frac{H}{g}}.$$

Пример № 10. Кольцо, изготовленное из однородного резинового жгута длиной L , массой M и жесткостью k , вращается в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси, проходящей через центр кольца, с угловой скоростью ω . Найдите радиус R вращающегося кольца.

Решение. Рассмотрим элементарный участок вращающегося кольца длиной Δl . Его масса $\Delta m = \frac{M}{2\pi R} \Delta l$. На выделенный участок дейст-

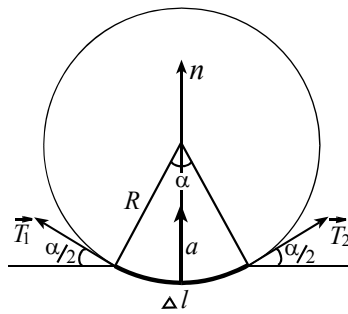


Рис. 11

вуют силы \vec{T}_1 и \vec{T}_2 (рис.11), направленные по касательным к кольцу и одинаковые по модулю $T_1 = T_2 = T$. По второму закону Ньютона $\Delta m \cdot \vec{a} = \vec{T}_1 + \vec{T}_2$. Рассматриваемый элементарный участок под действием приложенных сил равномерно движется по окружности, следовательно, его ускорение в любой момент времени направлено к центру окружности и по величине равно $\omega^2 R$. Переходя в математической записи второго закона Ньютона к проекциям сил и ускорения на нормальное направление, получаем

$$\frac{M \Delta l}{2\pi R} \omega^2 R = 2T \sin(\alpha/2).$$

Величина T упругой силы (силы натяжения) связана с удлинением $(2\pi R - L)$ кольца законом Гука $T = k(2\pi R - L)$. При малых углах $\sin(\alpha/2) \approx \alpha/2 = \Delta l/(2R)$. С учетом этих соотношений уравнение движения принимает вид $\frac{M}{2\pi R} \omega^2 \Delta l = 2k(2\pi R - L) \frac{\Delta l}{2R}$.

Отсюда $R = \frac{2\pi k L}{4\pi^2 k - \omega^2 M}$. Из последней формулы следует, что при

$\omega = 2\pi \sqrt{\frac{k}{M}}$ кольцо должно неограниченно растягиваться, однако этого не случится, так как закон Гука нарушится уже при небольших удлинениях, а с ростом ω кольцо разорвется.

Пример № 11. Определите вес P тела массой $m = 1\text{ кг}$ на географической широте φ . Ускорение свободного падения $g = 10\text{ м/с}^2$. Землю считайте однородным шаром радиуса $R = 6350\text{ км}$.

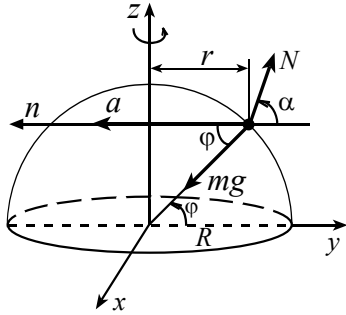


Рис. 12

Решение. Напомним, что вес \vec{P} тела – это сила, с которой тело действует на опору или подвес. Допустим, что тело лежит на поверхности вращающейся Земли, на него действуют сила тяжести $m\vec{g}$, направленная к центру Земли, и сила реакции \vec{N} (рис.12).

По третьему закону Ньютона $\vec{P} = -\vec{N}$. Поэтому для определения веса тела найдем силу реакции \vec{N} . В инерциальной системе отсчета тело равномерно движется по окружности радиуса $r = R \cdot \cos \varphi$ с периодом одни сутки, т.е. $T = 86400\text{ с}$ и циклической частотой

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 7,3 \cdot 10^{-5}\text{ с}^{-1}.$$

Ускорение тела по величине равно $a_n = \omega^2 \cdot r = \omega^2 \cdot R \cdot \cos \varphi$ и направлено к оси вращения Земли. Из этого следует, что равнодействующая сил тяжести и реакции Земли тоже должна быть направлена к оси вращения Земли. Тогда сила реакции образует с перпендикуляром к оси вращения некоторый угол $\alpha \neq \varphi$, иначе сумма сил, приложенных

к телу, а следовательно и ускорение были бы равны нулю. По второму закону Ньютона $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}$.

Перейдем к проекциям сил и ускорения на нормальное направление

$$m\omega^2 R \cos \varphi = mg \cos \varphi - N \cos \alpha,$$

и на направление, перпендикулярное плоскости, в которой лежит окружность, $0 = -mg \sin \varphi + N \sin \alpha$.

Исключая α из двух последних соотношений, находим вес тела

$$P = N = \sqrt{(mg)^2 - m^2 \omega^2 R (2g - \omega^2 R) \cos^2 \varphi}.$$

Пример № 12. Маленький деревянный шарик прикреплен с помощью нерастяжимой нити длиной $l = 30$ см ко дну цилиндрического сосуда с водой. Расстояние от центра дна до точки закрепления нити $r = 20$ см. Сосуд раскручивают вокруг вертикальной оси, проходящей через центр дна. При какой угловой скорости вращения нить отклонится от вертикали на угол $\alpha = 30^\circ$? Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

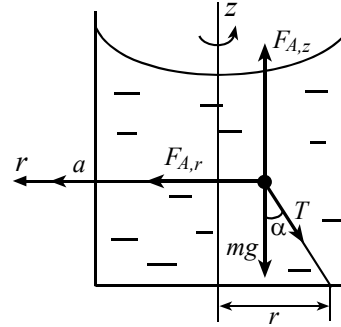


Рис. 13

Решение. Нить с шариком отклонится к оси вращения. Действительно, на шарик будут действовать три силы: сила тяжести $m\vec{g}$, сила натяжения \vec{T} нити и сила Архимеда \vec{F} (рис. 13). Найдем эту силу. Обозначим объем шарика V , плотность дерева, из которого изготовлен шарик ρ_w , плотность воды ρ_B , и рассмотрим движение жидкости до погружения в нее шарика. Любой элементарный объем воды равномерно движется по окружности в горизонтальной плоскости. Следовательно, вертикальная составляющая суммы сил давления (силы Архимеда) $F_{A,z}$ уравнивает силу тяжести, действующую на жидкость в рассматриваемом объеме, горизонтальная составляющая $F_{A,r}$ сообщает этой жидкости центростремительное ускорение. При замещении жидкости шариком эти составляющие не изменяются. Тогда вертикальная составляющая силы Архимеда, действующей на шарик, по величине равна $F_{A,z} = \rho_B V g$, а направленная к оси вращения составляющая силы Архимеда по величине равна $F_{A,r} = \rho_B V \omega^2 (r - l \sin \alpha)$.

Под действием приложенных сил шарик движется равномерно по окружности радиуса $(r - l \sin \alpha)$ в горизонтальной плоскости. Из второго закона Ньютона

$$m \vec{a} = m \vec{g} + \vec{T} + \vec{F},$$

переходя к проекциям сил и ускорения на вертикальную ось, находим

$$\rho_B V g - \rho_u V g - T \cos \alpha = 0,$$

проектируя силы и ускорения в горизонтальной плоскости на нормальное направление, получаем

$$\rho_u V \omega^2 (r - l \sin \alpha) = \rho_B V \omega^2 (r - l \sin \alpha) - T \sin \alpha.$$

Исключая T из двух последних соотношений, определяем искомую угловую скорость

$$\omega = \sqrt{\frac{g \operatorname{tg} \alpha}{r - l \sin \alpha}} \approx 10,7 \text{ с}^{-1}.$$

Пример № 13. Определите радиус R горбатого мостика, имеющего вид дуги окружности, если известно, что при скорости $V = 90 \text{ км/ч}$ вес автомобиля в верхней точке мостика вдвое меньше веса на горизонтальной дороге. Ускорение свободного падения $g = 10 \text{ м/с}^2$.

Решение. При движении по горизонтальной дороге вес тела равен силе тяжести.

Обратимся к движению автомобиля по мосту. Инерциальная система отсчета и силы, действующие на автомобиль и на мостик, показаны на рис. 14.

Для автомобиля в верхней точке мостика по второму закону Ньютона $m \vec{a} = m \vec{g} + \vec{N}$. Перейдем в этом уравнении к проекциям сил и ускорения

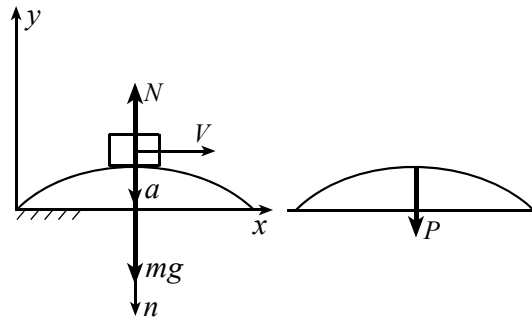


Рис. 14

На нормальное направление $m \frac{V^2}{R} = mg - N$. По условию $P = \frac{mg}{2}$, а

а по третьему закону Ньютона $\vec{N} = -\vec{P}$, тогда $N = \frac{mg}{2}$.

Из полученных соотношений находим $m \frac{V^2}{R} = \frac{mg}{2}$, отсюда

$$R = \frac{2 \cdot V^2}{g} = \frac{2 \cdot 25^2}{10} = 125 \text{ м.}$$

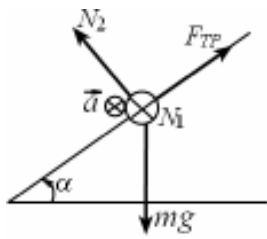


Рис. 15

Рассмотрим два примера, в которых тела движутся по окружности неравномерно, при этом тангенциальное ускорение тоже изменяется. В этом случае наряду с законом Ньютона полезно привлекать закон изменения (или сохранения) механической энергии.

Пример № 14. По длинной проволочной винтовой линии радиуса R с шагом H , ось которой вертикальна, скользит бусинка. Коэффициент трения скольжения бусинки по проволоке равен μ ($\mu < H / 2\pi R$). Найдите установившуюся скорость V скольжения бусинки. Ускорение свободного падения g .

Решение. На бусинку действуют силы: тяжести $m\vec{g}$, нормальной реакции \vec{N} и трения $F_{\text{тр}} = \mu N$, при этом $\vec{N} = \vec{N}_1 + \vec{N}_2$, здесь \vec{N}_1 – горизонтальная составляющая, а \vec{N}_2 лежит в одной плоскости с $m\vec{g}$ и $\vec{F}_{\text{тр}}$ (рис. 15). Из второго закона Ньютона следует, что с ростом величины скорости будет расти величина силы трения, так что естественно ожидать выхода движения на установившийся режим скольжения с некоторой скоростью V . Для определения этой скорости перейдем в инерциальную систему отсчета (ИСО), движущуюся по вертикали вниз со скоростью $V \sin \alpha$, α – угол наклона вектора скорости к горизонту, $\operatorname{tg} \alpha = H / 2\pi R$. В выбранной ИСО бусинка равномерно движется по окружности радиуса R со скоростью $V \cos \alpha$, при этом ускорение бусинки направлено к оси винтовой линии и по величине равно $(V \cos \alpha)^2 / R$. Из второго закона Ньютона

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{F}_{\text{тр}},$$

переходя к проекциям сил и ускорения на нормальное направление, находим

$m \frac{(V \cos \alpha)^2}{R} = N_1$. В вертикальной плоскости $\vec{0} = m \vec{g} + \vec{N}_2 + \vec{F}_{TP}$,

переходя к проекциям сил на взаимно ортогональные направления, находим

$$F_{TP} = m g \sin \alpha, \quad N_2 = m g \cos \alpha.$$

Из этих соотношений с учетом $F_{TP} = \mu \sqrt{N_1^2 + N_2^2}$ получаем

$$V = (g R / \mu)^{1/2} [(tg^2 \alpha - \mu^2)(tg^2 \alpha + 1)]^{1/4}.$$

Пример № 15. Гладкий желоб состоит из горизонтальной части AB и дуги окружности BD радиуса $R = 5\text{ м}$ (рис. 16). Шайба скользит по горизонтальной части со скоростью $V_0 = 10\text{ м/с}$. Определите модуль a ускорения шайбы в точке C и угол β , который вектор \vec{a} ускорения шайбы в этот момент составляет с нормалью. Радиус OC образует с вертикалью угол $\alpha = 60^\circ$. Ускорение свободного падения $g = 10\text{ м/с}^2$.

Решение. Для нахождения ускорения \vec{a} шайбы в точке C найдем тангенциальную a_τ и нормальную a_n составляющие ускорения в этой точке. На тело, движущееся в вертикальной плоскости по дуге BD (рис. 17), в любой точке действуют силы тяжести $m\vec{g}$ и реакции опоры \vec{N} . По второму закону Ньютона $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}$.

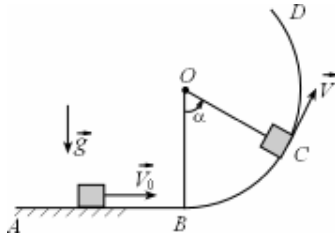


Рис. 16

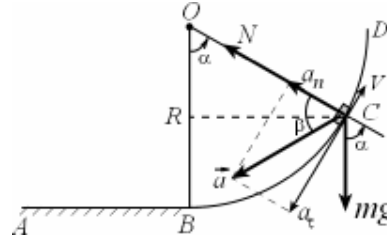


Рис. 17

Перейдем в этом уравнении к проекциям сил и ускорения на тангенциальное направление $ma_\tau = -mg \sin \alpha$.

Отсюда $a_\tau = -g \sin \alpha = -10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \approx -8,7\text{ м/с}^2$. Для определения

$a_n = \frac{V^2}{R}$ найдем величину V скорости шайбы в точке C . Обратимся

к энергетическим соображениям. При движении по горизонтальной части желоба скорость тела не изменяется вследствие отсутствия трения, а на вертикальной части желоба (как и на горизонтальной) сила нормальной реакции не совершает работу, т.к. эта сила перпендикулярна скорости. Следовательно механическая энергия (сумма кинетической и потенциальной) сохраняется.

Потенциальную энергию шайбы на горизонтальной части желоба будем считать равной нулю. Тогда по закону сохранения механической энергии

$$m \frac{V_0^2}{2} = m \frac{V^2}{2} + mgR(1 - \cos \alpha),$$

отсюда

$$a_n = \frac{V^2}{R} = \frac{V_0^2}{R} - 2g(1 - \cos \alpha) = \frac{10^2}{5} - 2 \cdot 10 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 10 \text{ м/с}^2.$$

Величину a ускорения шайбы в точке C найдем по теореме Пифагора

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_n^2} \approx 13,2 \text{ м/с}^2.$$

В точке C вектор ускорения \vec{a} образует с нормалью угол β такой, что

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{|a_r|}{a_n} \approx 0,87, \text{ отсюда } \beta \approx 41^\circ.$$

Пример № 16. На горизонтальной поверхности лежит полушар массой $M = 100$ кг. С его верхней точки без трения с нулевой начальной скоростью скользит шайба массой $m = 10$ г. Из-за трения между полушаром и горизонтальной поверхностью движение полушара начинается при $\alpha = 10^\circ$. Найдите коэффициент μ трения скольжения полушара по поверхности. Ускорение свободного падения $g = 10 \text{ м/с}^2$.

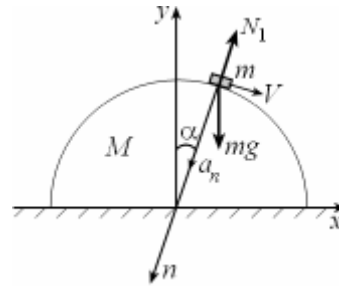


Рис. 18

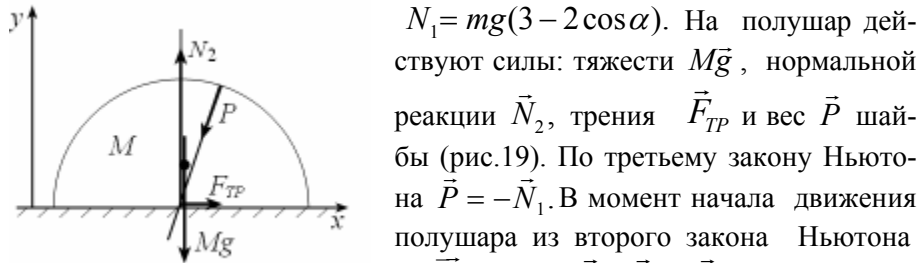
Решение. Рассмотрим силы, действующие на каждое из тел. На шайбу действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила нормальной реакции \vec{N}_1 (рис.18).

Из второго закона Ньютона $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}_1$.

Переходя к проекциям сил и ускорения на нормальное направление, в момент начала движения полушара получаем $m \frac{V^2}{R} = mg \cos \alpha - N_1$.

По закону сохранения энергии $\frac{mV^2}{2} = mgR(1 - \cos \alpha)$.

Из этих соотношений находим величину действующей на шайбу в этот момент силы нормальной реакции



$N_1 = mg(3 - 2 \cos \alpha)$. На полушар действуют силы: тяжести $M\vec{g}$, нормальной реакции \vec{N}_2 , трения \vec{F}_{TP} и вес \vec{P} шайбы (рис.19). По третьему закону Ньютона $\vec{P} = -\vec{N}_1$. В момент начала движения полушара из второго закона Ньютона $M\vec{a}_1 = M\vec{g} + \vec{P} + \vec{N}_2 + \vec{F}_{TP}$, переходя к

Рис. 19

проекциям сил и ускорения $\vec{a}_1 = \vec{0}$ полушара на вертикальное направление с учетом равенства $P = N_1$

получаем $N_2 = Mg + P \cos \alpha = Mg + mg(3 - 2 \cos \alpha) \cos \alpha$.

Переход к проекциям сил и ускорения полушара на горизонтальное направление позволяет определить величину силы трения

$$F_{TP} = P \sin \alpha = mg(3 - 2 \cos \alpha) \sin \alpha.$$

В момент начала движения полушара величина силы трения связана с величиной силы нормальной реакции соотношением $F_{TP} = \mu \cdot N_2$. Отсюда

$$\mu = \frac{F_{TP}}{N_2} = \frac{m(3 - 2 \cos \alpha) \sin \alpha}{M + m(3 - 2 \cos \alpha) \cos \alpha} \approx 0,17.$$

Контрольные вопросы

Справочные данные: гравитационная постоянная

$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{кг}^2$, масса Земли $M = 6 \cdot 10^{24} \text{ кг}$, радиус Земли $R = 6400 \text{ км}$; ускорение свободного падения у поверхности Земли

$g = G \frac{M}{R^2} \approx 10 \text{ м/с}^2$; объем шара радиуса R равен $V = \frac{4}{3} \pi R^3$.

1. Вычислите и сравните угловую скорость вращения минутной стрелки часов и угловую скорость Земли в ее суточном вращении.

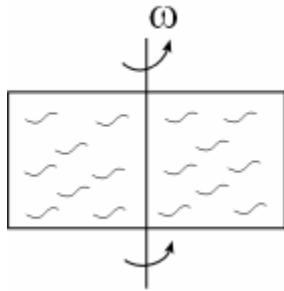
2. Вычислите в гелиоцентрической системе отсчета ускорение Земли, обусловленное обращением планеты вокруг Солнца. Вычислите в геоцентрической системе отсчета ускорение Солнца, обусловленное его видимым с Земли движением по небесной сфере. Радиус земной орбиты считайте равным $r = 1,5 \cdot 10^{11}$ м. Какая из полученных величин больше и во сколько раз? Выполняется ли в обеих системах отсчета второй закон Ньютона: (масса Солнца)*(ускорение Солнца) = (Сила гравитационного взаимодействия Солнца и Земли)? Если не выполняется, то чем, на Ваш взгляд, это можно объяснить?
3. Колесо, частота обращения которого в некоторый момент времени $n = 4 \text{ с}^{-1}$ (оборота в секунду), останавливается через $\tau = 30$ с. Определите угловое ускорение ε колеса, считая его постоянным. Сколько оборотов совершит колесо за указанное время?
4. В какой точке траектории камня, брошенного со скоростью $V_0 = 10 \text{ м/с}$ под углом $\alpha = 60^\circ$ к горизонту, радиус кривизны траектории наименьший? Вычислите этот радиус.
5. Постоянная по величине сила действует на тело массой $m = 3$ кг перпендикулярно скорости тела. В результате тело движется по окружности радиуса $R = 2$ м, совершая полный оборот за время $T = 3$ с. Найдите величину F силы.
6. Космический зонд обращается вокруг Луны на высоте, малой по сравнению с радиусом Луны. Найдите величину a ускорения, скорость V и период T обращения зонда. Отношение масс Луны и Земли $\alpha = 0,0123$, отношение радиусов Луны и Земли $\beta = 0,272$.
7. Груз на нити подвешен к потолку вагона, а наполненный гелием очень легкий надувной шарик прикреплен на нити к полу вагона, движущегося в горизонтальной плоскости по окружности радиуса $R = 1500$ м со скоростью $V = 30 \text{ м/с}$. В каком направлении и на какой угол отклонится от вертикали каждая нить? Воздух в вагоне не сообщается с атмосферой.
8. В Примере № 11 настоящего задания найдите связь величин $\text{tg} \alpha$, $\text{tg} \varphi$, ω , R , g . На сколько процентов отличаются $\text{tg} \alpha$ и $\text{tg} \varphi$ для точек земной поверхности не лежащих на полюсе и на экваторе?
9. Лиана выдерживает двух обезьян, висящих на ее конце. Может ли одна обезьяна раскачиваться на лиане с отклонением до угла $\alpha = 45^\circ$ от вертикали?

Задачи

1. Камень брошен под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту с начальной скоростью $V_0 = 20 \text{ м/с}$. Через некоторое время по траектории камня летит птица с постоянной скоростью $V = 2 \text{ м/с}$. Найдите ускорение птицы в верхней точке траектории.
2. По результатам геофизических исследований установлено, что за последние $\Delta t = 40$ лет продолжительность суток на Земле увеличилась на $\Delta T = 0,001 \text{ с}$ (замедление вращения Земли вокруг своей оси обусловлено действием приливов). Вычислите по этим данным угловое ускорение ε Земли. Считая вращение Земли равнозамедленным, найдите, через сколько миллионов лет в сутках будет 25 часов?
3. Бусинка массой $m = 0,1 \text{ кг}$ может скользить без трения по проволочному кольцу радиусом $R = 0,1 \text{ м}$, которое вращается вокруг вертикальной оси, совпадающей с диаметром кольца, совершая $n = 2$ оборота в секунду. В каком положении бусинка будет оставаться неподвижной относительно кольца? Что произойдет, если частоту вращения уменьшить вдвое?
4. Трамвай, движущийся прямолинейно по горизонтальному рельсовому пути со скоростью $V_0 = 7 \text{ м/с}$, выезжает на закругленный участок рельсового пути радиуса $R = 200 \text{ м}$ и равномерно по времени сбавляя скорость, проезжает до остановки $S = 100 \text{ м}$. Определите величины V скорости и a ускорения трамвая в середине участка торможения. При какой величине μ коэффициента трения скольжения пассажиры, сидящие в салоне, не будут скользить по сиденьям в процессе торможения?
5. Горизонтально расположенное тонкое кольцо радиуса $R = 0,25 \text{ м}$, сделанное из свинцовой проволоки, вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через центр кольца. При какой угловой скорости ω такое кольцо может разорваться, если для свинца предел прочности на разрыв, т.е. максимальная сила в расчете на единицу площади поперечного сечения, $\sigma_{np} = 15 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2$? Плотность свинца $\rho = 11,3 \cdot 10^3 \text{ кг/см}^3$.
6. На экваторе некоторой вращающейся планеты тела весят втрое меньше, чем на полюсе. На какой угол δ отклонится от направления, задаваемого осью вращения нить, на которой подвешен груз, если опыт

проводится на широте $\varphi = 30^\circ$? На сколько процентов вес тела на широте $\varphi = 30^\circ$ меньше веса на полюсе?

7. На легкой нити подвешен шарик. Нить приводят в горизонтальное положение и отпускают шарик. Какие углы α_i , $i = 1, 2, 3$ с вертикалью образует нить в тот момент, когда ускорение груза направлено 1) вертикально вверх; 2) вертикально вниз; 3) горизонтально; Во всех случаях вычислите и укажите найденные Вами величины a_i , $i = 1, 2, 3$ ускорения.



8. Центрифуга с водным раствором вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси. Найдите зависимость радиальной составляющей $F_{A,r}$ архимедовой силы от расстояния r до оси вращения в расчете на 1 см^3 раствора. Плотность раствора $\rho = 1,1\text{ г/см}^3$. Если центрифуга вращается с такой частотой, что максимальное давление в водном растворе превышает атмосферное

$P_0 = 10^5\text{ Па}$ в 50 раз, то какова наибольшая линейная скорость V частиц жидкости? Высоту центрифуги считайте пренебрежимо малой.

9. По гладкой длинной проволочной винтовой линии радиуса R с шагом H , ось которой вертикальна, скользит бусинка. За какое время T бусинка пройдет n витков? Начальная скорость бусинки равна нулю.

10. Брусок, к вертикальной стойке которого на легкой нити прикреплен шарик, покоится на шероховатой горизонтальной поверхности. Нить с шариком отклонили до горизонтального положения и отпустили. После этого шарик движется в вертикальной плоскости по окружности с нулевой начальной скоростью. Найдите наименьший коэффициент μ трения скольжения бруска по поверхности, если известно, что брусок остается неподвижным. Масса бруска втрое больше массы шарика.

