Федеральное агентство по образованию
Федеральная заочная физико-техническая школа
при Московском физико – техническом институте
(государственном университете)

МАТЕМАТИКА

Многочлены.
Уравнения и системы.

Задание №4 для 9-х классов

(2006-2007 учебный год)

г. Долгопрудный, 2006

Составитель: С. Е. Городецкий, ассистент кафедры высшей математики МФТИ.
Математика: задание №4 для 9-х классов (2006-2007 учебный год). - М.: МФТИ, 2006, 24 с.

Дата отправления заданий по физике и математике – 9 февраля 2007г.

Составитель:
Городецкий Сергей Евгеньевич
Изд. лиц. №040060 от 21.08.96г. Подписано 27.12.06
Формат 60x90 1/16. Бумага типографская. Печать офсетная. Усл. печ. л. 1,5
Уч.-изд. л. 1,33. Тираж 2100. Заказ №11-з.

Федеральная заочная физико-техническая школа
Московский физико-технический институт
(государственный университет)
«ФИЗТЕХ-ПОЛИГРАФ»

141700, Москов. обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
ФЗФТШ при МФТИ, тел/факс (495) 408-5145 – **заочное отделение**
тел./факс (495) 409-9351 – **очно-заочное отделение**
тел. 409-9583 – **очное отделение**

E.mail: zftsh@pop3.mipt.ru

Наш сайт: www.school.mipt.ru

§ 1. Многочлены

Многочленом с одной переменной называется выражение вида

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 . \left(a_n \neq 0\right) \qquad (1)$$

Числа $a_0, a_1, \ldots, a_n -$ это *коэффициенты* многочлена, здесь a_n называют *старшим коэффициентом*, $a_0 -$ *свободным членом*.

Степенью многочлена называют наибольшую степень переменной, входящую в многочлен.

Например, степень многочлена $x^4 - x^3 - x^2 + 2x + 1$ равна 4; степень многочлена $25 + x^5 - 3x$ равна 5; степень многочлена 17 равна 0, т. к. переменная в это выражение не входит; наконец, выражение $3x^2 + x + 5 + \dfrac{2}{x}$ многочленом не является, поэтому о его степени говорить бессмысленно.

Два многочлена называются *равными*, если равны все их коэффициенты. Многочлен равен нулю, если все его коэффициенты равны нулю. Степень нулевого многочлена не определена.

Число α является *корнем многочлена* $F\left(x\right)$, если $F\left(\alpha\right) = 0$.

Приведём некоторые важные сведения о многочленах.

Теорема 1. (*Деление многочленов с остатком*) (без доказательства). Для любых двух многочленов $F\left(x\right)$ и $G\left(x\right)$ существует единственная пара многочленов $P\left(x\right)$ (частное) и $Q\left(x\right)$ (остаток) такая, что $F\left(x\right) = G\left(x\right) \cdot P\left(x\right) + Q\left(x\right)$, причём степень остатка $Q\left(x\right)$ меньше степени делителя $G\left(x\right)$, или $Q\left(x\right)$ нулевой многочлен. Покажем, как на практике находят частное и остаток от деления многочленов.

Пример 1. Разделите с остатком многочлен $F(x) = x^7 + 2x^3 - 5$ на многочлен $G(x) = x^2 + x + 2$.

Решение. Процедура деления многочленов очень похожа на деление целых чисел. Если степень делимого больше степени делителя, то делаем следующее: делим старший член многочлена $F(x)$ на старший член многочлена $G(x)$, получившийся результат записываем в частное. Умножаем результат на весь делитель $G(x)$ и вычитаем полученное из исходного многочлена $F(x)$. Если в результате вычитания у оставшегося многочлена степень не меньше, чем степень делителя, то можно сделать ещё один шаг деления и т. д.

Деление закончится тогда, когда степень переменной будет меньше степени делителя. В случае, когда в делимом отсутствуют некоторые степени переменных, для удобства записи лучше оставить пустые места для соответствующих разрядов.

Таким образом, в нашем случае первый член частного равен $x^7 / x^2 = x^5$. При умножении x^5 на делитель $x^2 + x + 2$ получаем $x^7 + x^6 + 2x^5$. После вычитания из исходного многочлена от него остаётся $-x^6 - 2x^5 + 2x^3 - 5$. Степень многочлена, оставшегося после вычитания, равна 6. Это больше степени делителя, поэтому можно сделать следующий шаг деления. Делим $\left(-x^6\right)$ на x^2 и получаем $\left(-x^4\right)$ и его умножим на $\left(x^2 + x + 2\right)$, получаем $-x^6 - x^5 - 2x^4$; вычитаем этот многочлен из $-x^6 - 2x^5 + 2x^3 - 5$ и т. д.

$$\begin{array}{l|l}
x^7 \qquad\qquad\qquad + 2x^3 \qquad - 5 & x^2 + x + 2 \\ \cline{2-2}
\underline{x^7 + x^6 + 2x^5} & x^5 - x^4 - x^3 + 3x^2 + x - 7 \\
\quad -x^6 - 2x^5 & \\
\quad \underline{-x^6 - x^5 - 2x^4} & \\
\qquad\quad -x^5 + 2x^4 + 2x^3 & \\
\qquad\quad \underline{-x^5 - x^4 - 2x^3} & \\
\qquad\qquad\quad 3x^4 + 4x^3 & \\
\qquad\qquad\quad \underline{3x^4 + 3x^3 + 6x^2} & \\
\qquad\qquad\qquad\quad x^3 - 6x^2 & \\
\qquad\qquad\qquad\quad \underline{x^3 + x^2 + 2x} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad -7x^2 - 2x - 5 & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{-7x^2 - 7x - 14} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 5x + 9 &
\end{array}$$

Ответ: частное $x^5 + x^4 - x^3 + 3x^2 + x - 7$; остаток $5x + 9$.

Теорема 2. (*Теорема Безу и следствия из неё*).

1) Остаток от деления многочлена $F\left(x\right)$ на $\left(x - \alpha\right)$ равен $F\left(\alpha\right)$.

2) Число α является корнем многочлена $F(x)$ тогда и только тогда, когда многочлен $F(x)$ делится на многочлен $(x-\alpha)$.

3) Если α и $\beta -$ различные корни многочлена $F(x)$, то он делится на многочлен $(x-\alpha)(x-\beta)$.

4) Многочлен степени n не может иметь более n корней.

Доказательство. 1) Разделим многочлен $F(x)$ на $(x-\alpha)$. Тогда остаток будет являться многочленом нулевой степени (т. к. степень остатка меньше степени делителя, а степень делителя равна 1). Поэтому можно записать, что

$$F(x)=(x-\alpha)G(x)+C \qquad (2)$$

Через $G(x)$ здесь обозначено частное от деления, вид которого нас не интересует.

Равенство (2) верно при всех значениях x. Подставим в него $x=\alpha$.

Тогда $F(\alpha)=(\alpha-\alpha)G(\alpha)+C$, или $F(\alpha)=C$.

Подставим $C=F(\alpha)$ в (2) и получим

$$F(x)=(x-\alpha)G(x)+F(\alpha). \qquad (3)$$

Первая часть доказана.

2) Из (3) следует что $F(x)$ делится на $(x-\alpha)$ тогда и только тогда, когда $F(\alpha)=0$, т. е. тогда и только тогда, когда α есть корень многочлена $F(x)$.

3) $\alpha -$ корень $F(x)$ $\Rightarrow$ $F(x)$ делится на $(x-\alpha)$ $\Rightarrow$ $F(x)=$ $=(x-\alpha)G(x)$. Подставим в последнее равенство (которое верно для всех значений переменной x) $x=\beta$. Тогда $F(\beta)=(\beta-\alpha)G(\beta)$. $F(\beta)=0$ (т. к. $\beta -$корень $F(x)$), поэтому $(\beta-\alpha)G(\beta)=0\Rightarrow$ $\Rightarrow G(\beta)=0$ (т. к. $\beta\neq\alpha$); отсюда $G(x)$ делится на $(x-\beta)$, т. е. $G(x)=H(x)\cdot(x-\beta)$. Подведём итог:

$F(x)=(x-\alpha)G(x)=(x-\alpha)(x-\beta)H(x)$, т. е. $F(x)$ делится на $(x-\alpha)(x-\beta)$.

4) Теперь становится понятным, что многочлен степени n не может иметь больше, чем n корней.

Пример 2. Остатки от деления многочлена $F(x)$ на многочлены $(x-3)$ и $(x+3)$ равны 2 и (-9) соответственно. Найдите остаток от деления многочлена $F(x)$ на многочлен $x^2+2x-15.$

Решение. Заметим, что $x^2+2x-15=(x-3)(x+5).$

По теореме Безу $F(3)=2;\quad F(-5)=-9.$

Поделим $F(x)$ с остатком на $x^2+2x-15$:

$$F(x)=\left(x^2+2x-15\right)G(x)+r(x).$$

Степень остатка не превосходит степени делителя, поэтому остаток – это либо многочлен первой степени, либо нулевой степени, либо равен нулю. В любом случае, остаток представим в виде $r(x)=ax+b$ (если $a\neq 0,$ то получим многочлен первой степени; если $a=0,$ $b\neq 0,$ то будет многочлен нулевой степени; если $a=b=0,$ то получим нулевой многочлен). Итак,

$$F(x)=\left(x^2+2x-15\right)G(x)+ax+b. \tag{4}$$

Подставим в равенство (4) $x=3$ и $x=-5$: $F(3)=0\cdot G(3)+3a+b;$ $F(-5)=0\cdot G(-5)-5a+b,$ или $\begin{cases} 3a+b=2, \\ -5a+b=-9. \end{cases}$ Решая эту систему, находим, что $a=\dfrac{11}{8},$ $b=-\dfrac{17}{8}.$ **Ответ:** остаток равен $\dfrac{11}{8}x-\dfrac{17}{8}.$

Пример 3. Докажите, что

$$\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}+\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}=4. \tag{5}$$

Решение. Обычно, если вам предлагают выражения такого вида, то под корнями стоят сопряжённые числа (то есть, $a+\sqrt{b}$ и $a-\sqrt{b}$).

Пусть $\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}+\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}=x.$ Возведём обе части в куб:

$$26-15\sqrt{3}+3\sqrt[3]{\left(26-15\sqrt{3}\right)^2}\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}+3\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}\sqrt[3]{\left(26+15\sqrt{3}\right)^2}+$$
$$+26+15\sqrt{3}=x^3;$$

$$52+3\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}\,\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}\left(\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}+\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}\right)=x^3;$$

$$52+3\sqrt[3]{26^2-\left(15\sqrt{3}\right)^2}\left(\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}+\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}\right)=x^3;$$

$$52+3\left(\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}+\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}\right)=x^3;\quad 52+3x=x^3;$$

$$x^3-3x-52=0. \tag{6}$$

Число $x=4$ является корнем этого уравнения. Докажем, что других корней нет (и тем самым будет доказана справедливость равенства (5)). Поскольку $x=4$ является корнем, $x^3-3x-52$ делится на $x-4$ без остатка. Выполняя деление, получаем:

$$x^3-3x-52=0 \Leftrightarrow (x-4)\left(x^2+4x+13\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-4=0, \\ x^2+4x+13=0. \end{array}\right.$$

У квадратного трёхчлена $x^2+4x+13$ отрицательный дискриминант, поэтому уравнение (6) имеет ровно один корень $x=4$.

Пример 4. При каких a и b многочлен $F(x)=x^4+ax^3-2x^2+19x+b$ делится на многочлен x^2-3x+2?

Решение. 1-й способ. Выполним деление с остатком

$$\begin{array}{l|l}
x^4+ax^3-2x^2 \qquad + \qquad 19x+b & x^2-3x+2 \\ \cline{2-2}
\underline{x^4-3x^3+2x^2} & x^2+(a+3)x+(3a+5) \\
(a+3)x^3-4x^2 \qquad + \qquad 19x & \\
\underline{(a+3)x^3-(3a+9)x^2+(2a+6)x} & \\
\qquad (3a+5)x^2+(13-2a)x+b & \\
\qquad \underline{(3a+5)x^2-(9a+15)x+(6a+10)} & \\
\qquad\qquad (7a+28)x+(b-6a-10) &
\end{array}$$

Приравниваем коэффициенты остатка к нулю

$$\begin{cases} 7a+28=0, \\ b-6a-10=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-4, \\ b=-14. \end{cases}$$

2-й способ. $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$. Многочлен делится на $(x-1)(x-2)$ тогда и только тогда, когда 1 и 2 являются корнями многочлена. То есть,

$$\begin{matrix} F(1)=1+a-2+19+b=0, \\ F(2)=16+8a-8+38+b=0, \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 18+a+b=0, \\ 46+8a+b=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-4, \\ b=-14. \end{cases}$$

Ответ: $a=-4,\ b=-14$.

§2. Некоторые приёмы решения алгебраических уравнений

Все Вы прекрасно знаете, как решать квадратные уравнения. В реальности часто приходится сталкиваться с уравнениями третьей, четвёртой и более высоких степеней.

Существуют общие формулы для решения кубических уравнений и уравнений четвёртой степени, однако они очень сложные и на практике не используются. Также известно, что для уравнений степени выше 5 формулы для корней получить невозможно.

Отсюда становится понятно, что мы не можем решить произвольное уравнение степеней больше второй. Однако обычно мы сталкиваемся с такими задачами, в которых с помощью того или иного метода можно найти решения. Рассмотрением этих методов мы сейчас и займёмся.

Пример 5. Решите уравнение: $x^3+4x^2-2x-3=0$.

Решение: Заметим, что $x=1$ является корнем уравнения (*значение многочлена при* $x=1$ *равно сумме коэффициентов многочлена*). Тогда по теореме Безу многочлен x^3+4x^2-2x-3 делится на многочлен $x-1$. Выполнив деление, получаем: $x^3+4x^2-2x-3=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2+5x+3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=0, \\ x^2+5x+3=0. \end{array}\right.$$

Ответ: 1; $\dfrac{-5\pm\sqrt{13}}{2}$.

Обычно кубические уравнения решают именно так: подбирают один корень, выполняют деление уголком, после чего остаётся решить только квадратное уравнение. А что делать, если у нас уравнение четвёртой степени? Тогда придётся подбирать корень два раза. После «угадывания» первого корня и деления останется кубическое уравнение, у которого надо будет «угадать» ещё один корень. Возникает вопрос. Что делать, если такие «простые» числа как ±1, ±2 не являются корнями уравнения? Неужели тогда надо перебирать всевозможные числа? Ответ на этот вопрос даёт следующее утверждение.

Теорема 3. Если несократимая дробь p/q является корнем многочлена С ЦЕЛЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ, то свободный член делится на p, а старший коэффициент делится на q.

Доказательство. Пусть несократимая дробь p/q – корень многочлена (1). Это означает, что

$$a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + a_{n-2}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-2} + \ldots + a_2\left(\frac{p}{q}\right)^2 + a_1\left(\frac{p}{q}\right) + a_0 = 0.$$

Домножим обе части на q^n :

$$a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + a_{n-2}p^{n-2}q^2 + \ldots + a_2 p^2 q^{n-2} + a_1 pq^{n-1} + a_0 q^n = 0.$$

Перенесём $a_0 q^n$ в правую часть, а из оставшихся слагаемых вынесем p за скобки:

$$p\left(a_n p^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2}q + a_{n-2}p^{n-3}q^2 + \ldots + a_2 pq^{n-2} + a_1 q^{n-1}\right) = -a_0 q^n. \quad (7)$$

(7) представляет собой равенство двух целых чисел. Левая часть делится на $p \Rightarrow$ правая часть также делится на p. Числа p и q взаимно просты (т.к. дробь p/q несократимая), откуда следует, что $a_0 \vdots p$.

Аналогично доказывается, что $a_n \vdots q$. Теорема доказана.

Замечание. *Как правило, предлагаемые вам уравнениях имеют целые корни, поэтому наиболее важно запомнить следующее: У МНОГОЧЛЕНА С ЦЕЛЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ЦЕЛЫЕ КОРНИ ЯВЛЯЮТСЯ ДЕЛИТЕЛЯМИ СВОБОДНОГО ЧЛЕНА.*

Пример 6. Решите уравнение

а) $x^4 + 4x^3 - 102x^2 - 644x - 539 = 0;$ (8)

б) $6x^4 - 35x^3 + 28x^2 + 51x + 10 = 0.$ (9)

Решение. а) Попробуем найти целые корни уравнения. Пусть $p-$корень. Тогда $539 \vdots p;$ чтобы найти возможные значения $p,$ разложим число 539 на простые множители: $539 = 7^2 \cdot 11.$

Поэтому p может принимать значения: $\pm 1, \pm 7, \pm 11, \pm 49, \pm 77, \pm 539.$

Подстановкой убеждаемся, что $x = -1$ является корнем уравнения. Разделим многочлен (8) уголком на $x+1$ и получим:

$$(x+1)\left(x^3 + 3x^2 - 105x - 539\right) = 0.$$

Далее «угадываем» корни у получившегося многочлена третьей степени. Получаем $x = -7,$ а значит, $(x+1)(x+7)\left(x^2 - 4x - 77\right) = 0.$ Решая квадратное уравнение, находим, что $(x+1)(x+7)(x+7)(x-11) = 0.$

Ответ: $-7; -1; 11.$

Замечания. 1.*Обратите внимание, что после того, как найден первый корень, лучше сначала выполнить деление уголком, а уже потом приступать к поиску последующих корней.*
2. В последнем уравнении корень (-7) встретился дважды. Тогда говорят, что (-7) является *корнем кратности два*. Аналогично говорят о корнях *кратности три, четыре* и т. д.

б) Если уравнение имеет рациональный корень $x_0 = p/q$, то $10 \vdots p$, $6 \vdots q$, т.е. $p = \pm 1; \pm 2; \pm 5; \pm 10;$ $q = 1; 2; 3; 6.$ Возможные варианты для $x_0: \pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{5}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}, \pm\frac{5}{3}, \pm\frac{10}{3}, \pm\frac{1}{6}, \pm\frac{5}{6}.$ Начинаем перебирать числа из этого списка. Первым подходит число $x = 5/2$. Делим (9) на $(2x-5)$ и получаем $(2x-5)(3x^3-10x^2-11x-2)=0.$ Заметим, что для получившегося кубического уравнения выбор рациональных корней заметно сузился, а именно, следующие числа могут быть корнями: $x_0 = \pm 1, \pm 2, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3},$ причём мы уже знаем, что числа ± 1 и ± 2 корнями не являются. Находим, что $x = -\frac{2}{3}$ – корень; делим $3x^3-10x^2-11x-2$ на $3x+2$ и получаем: $(2x-5)(3x+2)(x^2-4x-1)=0.$ Решаем квадратное уравнение: $x^2-4x-1=0 \Leftrightarrow x = 2\pm\sqrt{5}.$ **Ответ:** $5/2; -2/3; 2\pm\sqrt{5}.$
К сожалению, уравнения не всегда имеют рациональные корни, поэтому приходится прибегать к другим методам. Заметим ещё раз. *Если нам дано кубическое уравнение или уравнение более высокой степени, то его обязательно можно решить.*

Пример 7. Разложите на множители: а) x^4+4; б) x^3-3x^2-3x-1; в) $x^4-x^3+2x^2-2x+4$; г) $x^4-4x^3-20x^2+13x-2.$

Решение.

а) $x^4+4 = x^4+4x^2+4-4x^2 = (x^2+2)^2-4x^2 = (x^2+2-2x)(x^2+2+2x).$

Замечание. Таким образом, сумму четвёртых степеней, в отличие от суммы квадратов , можно разложить на множители:

$$a^4+b^4 = \left(a^2-\sqrt{2}ab+b^2\right)\left(a^2+\sqrt{2}ab+b^2\right).$$

б) $x^3-3x^2-3x-1 = 2x^3-(x^3+3x^2+3x+1) = \left(\sqrt[3]{2}x\right)^3-(x+1)^3 =$

$$\left(\sqrt[3]{2}x-x-1\right)\left(\sqrt[3]{4}x^2+\sqrt[3]{2}x(x+1)+\sqrt[3]{2}(x+1)^2\right).$$

в) Вынесем x^2 за скобки и сгруппируем по степеням x:

$$x^4-x^3+2x^2-2x+4=x^2\left(x^2-x+2-\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}\right)=x^2\left(\left(x^2+\frac{4}{x^2}\right)-\left(x+\frac{2}{x}\right)+2\right).$$

Обозначим $x+\frac{2}{x}=t$. Тогда $x^2+4+\frac{4}{x^2}=t^2$, $x^2+\frac{4}{x^2}=t^2-4$, выражение в скобках принимает вид:

$$t^2-4-t+2=t^2-t-2=(t+1)(t-2)=\left(x+\frac{2}{x}+1\right)\left(x+\frac{2}{x}-2\right).$$

В итоге получаем:

$$x^2\left(x+\frac{2}{x}+1\right)\left(x+\frac{2}{x}-2\right)=\left(x^2+2+x\right)\left(x^2+2-2x\right)=\left(x^2+x+2\right)\left(x^2-2x+2\right).$$

г) Можно убедиться, что никакой из рассмотренных выше методов не помогает решить задачу, а именно: рациональных корней уравнение не имеет (числа ± 1 и ± 2 – не корни); вынесение числа x^2 за скобки и группировка слагаемых приводит к выражению

$$x^2\left(x^2-\frac{2}{x^2}-\left(4x-\frac{13}{x}\right)-20\right).$$

Если здесь обозначить $4x-\frac{13}{x}=t$, то $x^2-\frac{2}{x^2}$ через t не выражается.

Прибегнем к приёму, называемому *метод неопределённых коэффициентов*. Пусть

$$x^4-4x^3-20x^2+13x-2=\left(x^2+ax+b\right)\left(x^2+cx+d\right). \tag{10}$$

Попробуем подобрать коэффициенты a, b, c, d так, чтобы (10) обратилась в верное равенство. Для этого раскроем скобки в правой части и приведём подобные слагаемые:

$$x^4-4x^3-20x^2+13x-2=x^4+4(a+c)x^3+(b+ac+d)x^2+(ad+bc)x+bd. \tag{11}$$

Приравняем в (11) коэффициенты при одинаковых степенях в обеих частях уравнения. Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} a+c=-4, \\ b+ac+d=-20, \\ ad+bc=13, \\ bd=-2. \end{cases} \tag{12}$$

Мы будем пытаться найти целочисленные решения системы (12). (Дело в том, что нахождение всех решений системы (12) не проще, чем решение исходной задачи).

Рассмотрим четвёртое уравнение. Возможны только два принципиально различных случая:
1) $b=1$ и $d=-2$; 2) $b=2$ и $d=-1$. Рассмотрим каждый из них. Подставляем значения b и d в первые три уравнения:

1) $\begin{cases} a+c=-4, \\ ac=-19, \\ -2a+c=13. \end{cases}$ Из первого и третьего уравнений системы получаем $c=5/3$; $a=-17/3$, что не удовлетворяет второму уравнению, поэтому система решений не имеет; пара чисел $b=1$ и $d=-2$ не подходит.

2) $\begin{cases} a+c=-4, \\ ac=-21, \\ -a+2c=13. \end{cases}$ Эта система имеет одно решение $a=-7, c=3$. Значит, числа $a=-7, b=2, c=3, d=-1$ является решением системы (12), поэтому $x^4-4x^3-20x^2+13x-2=\left(x^2-7x+2\right)\left(x^2+3x-1\right)$.

§ 3. Системы уравнений

В этом параграфе мы подробно остановимся на системах уравнений с двумя неизвестными.

Простейший класс систем – системы линейных уравнений, которые Вы уже подробно изучили в школе. Далее разбираются такие системы уравнений, в которых одно из уравнений линейное или может быть разложено на линейные множители. Завершается этот параграф изучением симметрических систем уравнений.

1. *Линейная* система – это система вида

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2, \end{cases} \qquad (13)$$

где в каждом уравнении хотя бы один из коэффициентов a_1 или b_1, a_2 или b_2 не ноль. Ее *решение* – это упорядоченная **пара** чисел $(x; y)$.

Для линейной системы возможен только один из случаев:

система имеет одно решение,

система имеет бесконечное множество решений,

система не имеет решений.

Систему (13) можно решать и *методом подстановки* и *методом исключения* одного неизвестного.

Пример 8. Решить системы уравнений

$$1)\ \begin{cases} 2x+3y=2, \\ 5x-6y=5; \end{cases} \quad 2)\begin{cases} x-3y=3, \\ 2x-6y=6; \end{cases} \quad 3)\ \begin{cases} x-3y=3, \\ 2x-6y=-6. \end{cases}$$

►►1) Используем метод *исключения*. Для исключения x первое уравнение умножаем на 5, второе – на 2 и вычитаем его из первого, получаем

$$(15+12)y = 10-10\ , \quad 27y=0, \quad y=0.$$

Для исключения y первое уравнение умножаем на 2 и складываем со вторым, получаем $9x = 9$, $x = 1$.

Пара (1; 0) – единственное решение системы 1).

На рис. 3 изображены графики уравнений системы. Это прямые, пересекающиеся в точке (1; 0).

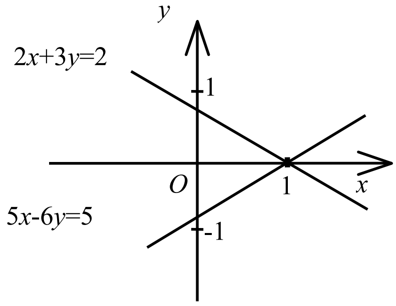

Рис. 3

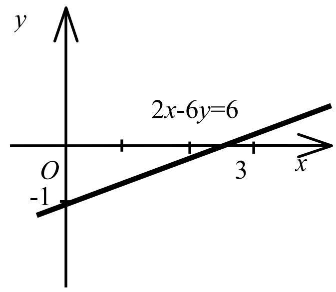

Рис. 4

2) Метод *подстановки*. Из первого уравнения выражаем x через y:

$$x = 3y + 3, \tag{14}$$

и подставляем во второе уравнение вместо x правую часть этого равенства. Получаем $6y + 6 - 6y = 6$, $0y = 0$.

Последнее равенство верно при любом y. Взяв *любое* число y и определив x из (14), получим пару $(3y + 3; y)$ – решение системы 2). Таких решений *бесконечно много*.

Второе уравнение системы получено умножением на 2 первого уравнения, эти уравнения равносильны, и система равносильна одному из этих уравнений. График каждого из уравнений – прямая $y = \frac{1}{3}x - 1$ (рис.4).

Координаты каждой ее точки решение данной системы.

Ответ: $(3y + 3; y)$, $y \in \mathbf{R}$.

3) Из первого уравнения выражаем $x = 3y + 3$ и подставляем во второе: $6y + 6 - 6y = -6$, $0y = -12$.

Последнее равенство неверно при любом y, значит, система 3) решений не имеет. Графики уравнений две – параллельные прямые $y = \frac{1}{3}x - 1$ и $y = \frac{1}{3}x + 1$ (рис.5). Они не имеют общих точек и система не имеет решений.

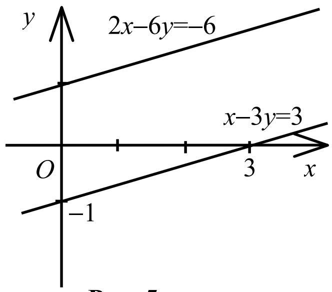

Рис. 5

Ответ: $\varnothing$. ◀◀

Пример 9. При каких a система

$$\begin{cases} 4ax + (a+3)y = 3a - 1, \\ (a+1)x + 2y = a, \end{cases} \qquad (15)$$

а) имеет одно решение?

б) имеет бесконечно много решений? в) не имеет решений?

▶▶Для исключения y умножим второе уравнение на $(a+3)$ и вычтем из него первое, умноженное на 2, получим

$$((a+3)(a+1) - 2\cdot 4a)x = (a+3)a - 2(3a - 1),$$
$$(a^2 - 4a + 3)x = a^2 - 3a + 2. \qquad (16)$$

Для исключения x вычитаем второе уравнение, умноженное на $4a$, из первого, умноженного на $(a+1)$, получаем

$$((a+1)(a+3) - 4a\cdot 2)y = (a+1)(3a-1) - 4a\cdot a\ ,$$
$$(a^2 - 4a + 3)y = a^2 + 2a - 1\ . \qquad (17)$$

Для x и y получили линейные уравнения с одинаковым коэффициентом. Находим значения a, при которых он равен нулю:

$$a^2 - 4a + 3 = 0\ ,\ a_1 = 1,\ a_2 = 3.$$

Если этот коэффициент не ноль, т.е. $a \neq 1$ и $a \neq 3$, то уравнения (16) и (17) имеют по одному решению

$$x_o = \frac{a^2 - 3a + 2}{a^2 - 4a + 3}\ ,\quad y_o = \frac{-a^2 + 2a - 1}{a^2 - 4a + 3}\ . \qquad (18)$$

Эта пара является и единственным решением исходной системы (15), что устанавливаем проверкой.

При $a = 1$ уравнения (16) и (17) имеют вид: $0x = 0$, $0y = 0$, их решениями являются *любые* значения x и y. Но об этих уравнениях заранее можно знать лишь, что они *следствия* исходной системы (15). Она при $a = 1$ имеет вид

$$\begin{cases} 4x + 4y = 2, \\ 2x + 2y = 1. \end{cases} \qquad (19)$$

Здесь первое уравнение получено умножением второго на 2. Решением этой системы будет уже ***не любая*** пара x и y. Множество решений системы (19) совпадает с множеством решений одного из ее уравнений и имеет, например, вид $(x;\ \frac{1}{2} - x)$, $x \in \mathbf{R}$.

При $a = 3$ уравнение (16) имеет вид $0x = 2$ и решений не имеет. Значит, и система (15) при $a = 3$ решений не имеет.

Ответ: а) верно при $a \neq 1$ и $a \neq 3$; б) верно при $a = 1$; в) верно при $a = 3$. ◀◀

2. Системы, в которых одно из уравнений линейное, как правило, решаются следующим образом. Из линейного уравнения одна из переменных выражается через другую и подставляется во второе уравнение. Если в системе оба уравнения нелинейные, то применяют также комбинирование уравнений с целью получения нового уравнения, которое можно разложить на простые множители.

Пример 10. Решите систему уравнений:

$$а)\begin{cases} 2x^2 - y^2 - x + y + 1 = 0, \\ 4x^2 - y^2 = 0; \end{cases} \quad б)\begin{cases} (x-y)xy = 30, \\ (x+y)xy = 120; \end{cases} \quad в)\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 6, \\ 3x^2 + 2xy - y^2 = 3. \end{cases}$$

Решение. $а)$ Из второго уравнения системы: $(2x - y)(2x + y) = 0$, поэтому $\begin{cases} 2x^2 - y^2 - x + y + 1 = 0, \\ 4x^2 - y^2 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - y^2 - x + y + 1 = 0, \\ \left[\begin{array}{l} 2x - y = 0, \\ 2x + y = 0, \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 2x, \\ 2x^2 - y^2 - x + y + 1 = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} y = -2x, \\ 2x^2 - y^2 - x + y + 1 = 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Решение каждой из этих систем сводится к решению квадратного уравнения.

Ответ: $(1;2), \left(-\frac{1}{2};-1\right), \left(\frac{-3+\sqrt{17}}{4};\frac{-3-\sqrt{17}}{2}\right), \left(\frac{-3-\sqrt{17}}{4};\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right).$

$б)$ Сложим оба уравнения: $2x^2y = 150$; вычтем из второго уравнения первое: $2xy^2 = 90$. Таким образом, $\begin{cases} (x-y)xy = 30, \\ (x+y)xy = 120, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2y = 75, \\ xy^2 = 45. \end{cases}$

Умножим первое уравнение на второе: $x^3y^3 = 75 \cdot 45 \Rightarrow xy = 15$. Тогда

$$\begin{cases} x^2 y = 75, \\ xy^2 = 45, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \cdot xy = 75, \\ xy \cdot y = 45, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \cdot 15 = 75, \\ 15 \cdot y = 45, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5, \\ y = 3. \end{cases}$$ **Ответ:** $(5;3)$.

в) Умножим первое уравнение на (-1), второе на 2 и сложим:

$$-2x^2 - y^2 + 2\left(3x^2 + 2xy - y^2\right) = -6 + 2 \cdot 3,\ 4x^2 + 4xy - 3y^2 = 0.$$

Получившееся уравнение называется *однородным уравнение второй степени.* В нём каждое слагаемое является одночленом второй степени относительно переменных x, y. Такие уравнения решают следующим образом.

Заметим, что $y = 0$ не является решением уравнения (т. к. если $y = 0$, то из уравнения вытекает, что $x = 0$, а пара чисел $(0;0)$ не является решением исходной системы). Поэтому можно разделить обе части на y^2: $4\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 4\left(\frac{x}{y}\right) - 3 = 0$. Это уравнение является квадратным относительно отношения x/y. Решаем его и получаем:

(1) $\frac{x}{y} = \frac{1}{2}$ или (2) $\frac{x}{y} = -\frac{5}{2}$. В каждом случае выражаем x через y и подставляем в одно из уравнений исходной системы (выберем первое как наиболее простое).

$$(1)\ y = 2x \Rightarrow 2x^2 + 4x^2 = 6,\ \ x = \pm 1.$$

$$(2)\ y = -\frac{2}{3}x \Rightarrow 2x^2 + \frac{4}{9}x^2 = 6,\ \ x = \pm\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{11}}.$$

Находим соответствующие значения y.

Ответ: $(-1;-2), (1;2), \left(\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{11}}; -2\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{11}}\right), \left(-\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{11}}; \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{11}}\right)$.

3. Многочлен с двумя переменными $F(x, y)$ называется симметрическим, если $F(x, y) = F(y, x)$. Иными словами, многочлен является симметрическим, если он не изменяется, когда переменные x и y меняются местами. Например, многочлены $x^3 + y^3;\ xy - 590;$

$2x^2y + y + 2xy^2 + x$ являются симметрическими, а многочлены $x^2 + y^2 - 6x$ и $2x^5 + 2y$ симметрическими не являются.

Многочлены $a = x + y$ и $b = xy$ называются элементарными симметрическими многочленами. Оказывается, что любой симметрический многочлен можно представить в виде многочлена относительно элементарных симметрических многочленов. Последнее утверждение часто оказывается полезным при решении систем, в которых оба уравнения симметрические. А именно, такие системы сильно упрощаются при замене $x + y = a,\ \ xy = b.$

Пример 11. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 7, \\ xy\left(x + y\right) = -2. \end{cases}$$

$$x^3 + y^3 = \left(x + y\right)\left(x^2 - xy + y^2\right) = \left(x + y\right)\left(x^2 - 2xy + y^2 - 3xy\right) =$$

$$= \left(x + y\right)\left(\left(x + y\right)^2 - 3xy\right) = a\left(a^2 - 3b\right) = a^3 - 3ab;\ xy\left(x + y\right) = ab.$$

Получаем: $\begin{cases} a^3 - 3ab = 7, \\ ab = -2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^3 = 1, \\ ab = -2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1, \\ b = -2 \end{cases}.$

Значит, $\begin{cases} x + y = 1, \\ xy = -2. \end{cases}$ **Ответ:** $\left(2;-1\right), \left(-1;2\right).$

§4. Иррациональные уравнения

Уравнение называют *иррациональным*, если оно содержит переменное выражение под знаком корня.

Напомним, что квадратный корень из $f(x)$, т.е. $\sqrt{f(x)}$, *определен лишь для тех значений x, для которых* $f(x) \geq 0$.

Все значения $\sqrt{f(x)}$ *неотрицательны*.

Для любого значения x из области определения $f(x)$ определен $\sqrt{(f(x))^2}$, поскольку $(f(x))^2 \geq 0$. При этом

$$\sqrt{(f(x))^2} = f(x), \quad \text{если } f(x) \geq 0,$$

$$\sqrt{(f(x))^2} = -f(x), \quad \text{если } f(x) \leq 0,$$

или, короче, $\sqrt{(f(x))^2} = |\,f(x)\,|$, *Область определения и область значений квадратного корня* необходимо учитывать при решении задач.

Пример 12. Решить уравнение

$$\sqrt{x+4}\,(25 - x^2) = 0.$$

⏩ Уравнение *определено лишь для таких значений* x, *что* $x + 4 \geq 0$, т.е. $x \geq -4$. Первый множитель равен нулю при $x = -4$, и это число – решение уравнения. Второй сомножитель равен нулю при $x = 5$ и $x = -5$. Из них области определения принадлежит лишь 5, это решение уравнения. Второе число $x = -5$ – не решение уравнения.

Ответ: – 4; 5. ⏪

По области определения и по области значений выражений, входящих в иррациональное уравнение, иногда легко обнаружить, что оно не имеет решений. Например, это видно для уравнений

$$\sqrt{x} = -1 \quad \text{и} \quad 3\sqrt{x-3} = 1 - x\,.$$

В первом уравнении левая часть неотрицательна, $\sqrt{x} \geq 0$, поэтому равенство *неверно* при любом $x \geq 0$. Во втором уравнении левая часть также неотрицательна. Уравнение определено лишь при $x \geq 3$. Для этих x имеем: $1 - x \leq -2$, т.е. правая часть отрицательна. Значит, равенство неверно при любом $x \geq 3$, решений нет.

При возведении частей уравнения в квадрат получаемое новое уравнение-*следствие*, иногда оказывается равносильным исходному, а иногда – нет. Например, возведя в квадрат обе части уравнения $\sqrt{x} = 1$, получим равносильное уравнение $x = 1$. А возведя в квадрат обе части уравнения $\sqrt{x} = -1$, не имеющего решений, получим неравносильное ему уравнение $x = 1$, имеющее решение 1.

Пример 13. Решить уравнения

1) $3\sqrt{x} = x + 2$; 2) $\sqrt{x} = 2 - x$;

3) $\sqrt{x} = x - 2$; 4) $3\sqrt{x} = -x - 2$.

⏩ Возведя в квадрат обе части каждого из этих уравнений, после простых преобразований получим уравнение

$$x^2 - 5x + 4 = 0, \tag{20}$$

– *следствие* каждого из уравнений 1) – 4). Оно имеет корни 1 и 4.

1) Проверяем их подстановкой в 1):

$x = 1 \;\Rightarrow\; 3 = 1 + 2$ – верное равенство $\Rightarrow$ 1 – корень 1);

$x = 4 \;\Rightarrow\; 3{\cdot}2 = 4 + 2$ – верное равенство $\Rightarrow$ 4 – корень 1).

Уравнения 1) и (20) оказались равносильными.

Ответ: 1, 4.

2) Подстановка корней (20) в уравнение 2) дает:

$x = 1 \;\Rightarrow\; 1 = 2 - 1$ – верное равенство $\Rightarrow$ 1 – корень 2);

$x = 4 \;\Rightarrow\; 2 = 2 - 4$ **неверное** равенство $\Rightarrow$ 4 – **не корень** 2).

Ответ: 1.

3) Для этого уравнения

$x = 1 \;\Rightarrow\; 1 = 1 - 2$ **неверное** равенство $\Rightarrow$ 1 – **не корень** 3);

$x = 4 \;\Rightarrow\; 2 = 4 - 2$ верное равенство $\Rightarrow$ 4 – корень 3).

Ответ: 4.

4) Для уравнения 4) в обоих случаях получаем неверные равенства, а именно, $3 \cdot 1 = -3$ и $3 \cdot 2 = -6$. **Ответ**: $\varnothing$. ◂◂

Отметим, что уравнение следствие (20) оказалось *неравносильно* каждому из уравнений 2), 3), 4). Потеря равносильности произошла при возведении обеих частей в квадрат.

Приобретение посторонних корней может произойти не только при возведении его частей в квадрат, но и при сокращении, приведении подобных членов. Добавим к этому еще замену произведения корней $\sqrt{f(x)}\,\sqrt{g(x)}$ на корень из произведения $\sqrt{f(x)g(x)}$. Во всех этих случаях нужна проверка получаемых корней.

Вместо проверки корней уравнения – следствия $(f(x))^2 = (g(x))^2$ подстановкой их в уравнение $f(x) = g(x)$ можно

добавить к уравнению – следствию такие ограничения в виде неравенств для неизвестного, что система из уравнения и этих неравенств будет иметь те же решения, что и исходное уравнение, т. е. будет равносильна ему. Во-первых, значения неизвестного должны быть ограничены областью определения исходного уравнения. Во-вторых, должно быть обеспечено ***совпадение знаков частей уравнения.***

В примере 13 уравнение (20) определено для всех x, а каждое из уравнений 1) 4) лишь для $x \ge 0$. Значит, это условие необходимо добавить к (20). Получаемая система

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 4 = 0, \\ x \ge 0, \end{cases} \tag{21}$$

оказывается равносильной уравнению 1), но не равносильна уравнениям 2), 3), 4). Нужно еще добавить условие одинаковости знаков обеих частей исходного уравнения.

В уравнении 2) левая часть $\sqrt{x}$ неотрицательна, поэтому к (21) нужно добавить условие неотрицательности правой части $2 - x$. В результате получим систему $\begin{cases} x^2 - 5x + 4 = 0, \\ x \ge 0, \\ 2 - x \ge 0, \end{cases}$

равносильную уравнению 2). Действительно, из двух решений 1 и 4 уравнения из этой системы лишь 1 удовлетворяет обоим добавленным неравенствам, и, как было проверено, является решением 2).

Аналогично, уравнению 3) примера 13 равносильна система

$$\begin{cases} x^2-5x+4=0, \\ x \ge 0, \\ x-2 \ge 0. \end{cases}$$

Она, как и 2), имеет одно решение $x = 4$.

Уравнению 4) равносильна система $\begin{cases} x^2-5x+4=0, \\ x \ge 0, \\ -x-2 \ge 0, \end{cases}$

не имеющая, как и 4), решений.

В следующих примерах показаны некоторые простые приемы, используемые при решении иррациональных уравнений.

Пример 14. Решите уравнение $\sqrt{2+4x} = x.$

⏩1) Это уравнение равносильно системе $\begin{cases} 2+4x = x^2, \\ x \ge 0. \end{cases}$

Здесь неравенство $x \ge 0$ обеспечивает совпадение знаков частей уравнения. Уравнение этой системы имеет корни $2+\sqrt{6}$ и $2-\sqrt{6}$. Неравенству $x \ge 0$ удовлетворяет только $2+\sqrt{6}$.

Отметим, что проверка этих значений подстановкой в уравнение 1) технически *сложнее*, чем проверка неравенства $x \ge 0$.

Ответ: $2+\sqrt{6}$.

Пример 15. Решить уравнения

1) $2\sqrt{2t^2+22t+36} = 12-3t$; 2) $\sqrt{2t+4} + \sqrt{t+9} = 5$.

⏩ 1) Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 4(2t^2+22t+36) = (12-3t)^2, \\ 12-3t \ge 0. \end{cases} \tag{22}$$

Условие неотрицательности подкоренного выражения можно опустить, так как из первого уравнения системы (22) видно, что оно равно квадрату, и, следовательно, неотрицательно. Условие неотрицательности правой части, обеспечивающее совпадение знаков частей уравнения (или, что то же самое, обеспечивающее область значений корня) напротив <u>нельзя опустить, т.к. оно не следует из первого уравнения (22).</u>

<u>Уравнение в (22) сводится к квадратному.</u>

$$t^2 - 160t = 0, \qquad t_1 = 0, \quad t_2 = 160.$$

Из его корней неравенству в системе удовлетворяет лишь $t_1 = 0$.

Ответ: 0.

2) Обе части уравнения на его области определения неотрицательны, поэтому данное уравнение *равносильно* следующему:

$$(\sqrt{2t+4}+\sqrt{t+9})^2 = 5^2.$$

Применив формулу для квадрата суммы, преобразуем это уравнение к *следствию*

$$2\sqrt{2t^2+22t+36} = 12 - 3t. \qquad (23)$$

Область определения исходного уравнения задается неравенствами

$$\begin{cases} 2t+4 \ge 0, \\ t+9 \ge 0. \end{cases} \qquad (24)$$

Эти неравенства вместе с уравнением (23) составляют систему, равносильную исходному уравнению.

Уравнение (23) решено в п.1), его решение $t_1 = 0$. Это значение удовлетворяет системе неравенств (24), т.е. принадлежит области определения исходного уравнения 2), значит, является его решением.

Ответ: 0. ◀◀

Показанный здесь способ решения уравнения 2) требует дважды возведения в квадрат – при переходе к (23) и при решении (23) (как в 1)). *И каждый раз это требует отбора корней*.

Отметим, что найденное в 1) при решении уравнения значение $t_2 = 160$, удовлетворяет системе неравенств (24), т.е. принадлежит области определения уравнения 2). И не будучи исключенным при решении системы (22) в 1), оно попало бы в решения 2), что привело бы к ошибке.

Для преобразования уравнения, содержащего несколько радикалов, один из них "*уединяют*", затем возводят обе части в подходящую степень.

Пример 16. Решить уравнение

$$\sqrt{5x+1} - \sqrt{3x-1} - \sqrt{x+1} = 0.$$

▶▶ В этом уравнении два из трех радикалов имеют одинаковые знаки, их то и отнесем к одной части уравнения, тем самым "уединим" третий радикал. Получим $\sqrt{5x+1} = \sqrt{3x-1} + \sqrt{x+1}$.

Область определения этого уравнения задается системой неравенств

$$\begin{cases} 5x+1 \ge 0, \\ 3x-1 \ge 0, \\ x+1 \ge 0. \end{cases} \qquad (25)$$

Обе части уравнения неотрицательны, поэтому оно равносильно уравнению $5x + 1 = (\sqrt{3x-1}+\sqrt{x+1})^2$, которое при условиях (25) равносильно следующему $x + 1 = 2\sqrt{3x^2+2x-1}$.

В силу последнего неравенства из (25) обе части этого уравнения неотрицательны, поэтому оно при условиях (25) равносильно уравнению

$$(x+1)^2 = 4(3x^2 + 2x - 1).$$

Итак, исходное уравнение равносильно системе из этого последнего уравнения и неравенств (25).

Полученное уравнение сводим к квадратному $11x^2 + 6x - 5 = 0$, его корни $\frac{5}{11}$ и -1. Подставив эти значения в (25), обнаружим, что лишь $\frac{5}{11}$ решение исходного уравнения.

Ответ: $\frac{5}{11}$. ◀◀

Замечание. *В предыдущих задачах можно не следить за равносильностью преобразований, а в конце решения сделать проверку. Так сделать проще в том случае, если в итоге у уравнения получаются простые решения.*

Нередко иррациональное уравнение удается упростить, *введя новое неизвестное*.

Пример 17. Решите уравнение: $3x^2 + \sqrt{3x^2 - 8x + 1} = 8x + 19$.

Решение. Перенесём всё в левую часть:

$3x^2 - 8x - 19 + \sqrt{3x^2 - 8x + 1} = 0$. Введём обозначение:

$$\sqrt{3x^2 - 8x + 1} = t. \tag{26}$$

Тогда

$$3x^2 - 8x = t^2 - 1. \tag{27}$$

Подставим в исходное уравнение: $t^2 + t - 20 = 0$, откуда находим корни $t_1 = 4$ и $t_2 = -5$. Подставляем найденные значения t в (29) и получаем:

$\left[\begin{array}{l} \sqrt{3x^2 - 8x + 1} = -5 \\ \sqrt{3x^2 - 8x + 1} = 4 \end{array}\right.$. Первое из этих уравнений не имеет решений, а второе эквивалентно следующему: $3x^2 - 8x + 1 = 16$, $3x^2 - 8x - 15 = 0$,

$x = \frac{4 \pm \sqrt{61}}{3}$. **Ответ**: $x = \frac{4 \pm \sqrt{61}}{3}$.

Замечание. *Если для нахождения* x *вместо равенства (26) использовать равенство (27), полученное из (26) возведением в квадрат, то это приведёт к возникновению посторонних корней (*$t = -5$ *при подстановке в (27) даёт уравнение* $3x^2 - 8x = 24$).

Таким образом, каждое возведение в квадрат может привести к нарушению равносильности, а именно, к появлению лишних корней. В этой задаче возведение в квадрат было произведено при переходе от (26) к (27); как раз здесь и произошло приобретение посторонних корней.

Контрольные вопросы

1(3). Равносильны ли следующие уравнения:

а)(1) $x^2-5x+5=1$ и $x^2-5x+5+\dfrac{10}{16-x^2}=1+\dfrac{10}{16-x^2}$;

б)(1) $\left(x^2-3x-28\right)\left(x+3\right)=0$ и $\left(x^2-3x-28\right)\sqrt{x+3}=0$;

в)(1) $\dfrac{2x+7}{1-5x}=7$ и $\dfrac{2x^3+7x^2}{x^2-5x^3}=7$.

2(2). При каких значениях a многочлен $x^{2007}+56x^{1453}+20ax^{988}+44$ делится на многочлен $x-1$?

Поделите многочлен $F\left(x\right)$ на многочлен $G\left(x\right)$:

3(2). $F\left(x\right)=x^5-3x^4+2x^3-x+7,\quad G\left(x\right)=x^2-x-1.$

4(2). $F\left(x\right)=x^6-x^4-19,\quad G\left(x\right)=x^3+3x-4.$

5(4). Остаток от деления многочлена $F\left(x\right)$ на многочлен $\left(x+3\right)$ равен 7, а остаток от деления многочлена $F\left(x\right)$ на $x-9$ равен 13. Найдите остаток от деления многочлена $F\left(x\right)$ на многочлен $x^2-6x-27$.

Решите кубические уравнения:

6(2). $x^3-6x^2+11x-6=0.$ **7(2).** $2x^3+9x^2+8x-3=0.$

8(5). Выразите через элементарные симметрические многочлены:

а)(1) x^2+y^2; **б)(2)** x^4+y^4; **в)(2)** x^7+y^7.

9(6). При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} \left(a+1\right)x+3y=2a-1, \\ \left(7-a\right)x+3\left(a+2\right)y=4a-1 \end{cases}$$

а) имеет одно решение;
б) не имеет решений;
в) имеет бесконечно много решений?

Укажите эти решения.

Задачи

1(3) Вычислите: $\sqrt[3]{45+29\sqrt{2}}+\sqrt[3]{45-29\sqrt{2}}$.

2(10). Решите алгебраические уравнения:

а(3) $x^5+9x^4+21x^3+5x^2-24x-12=0$; **б(3)** $6x^4-x^3-79x^2-5x+7=0$;

в(4) $6x^3-6\sqrt{6}x^2+11x-\sqrt{6}=0.$

3(4) При каких значениях a и b многочлен $x^4+5x^3+ax^2-17x+b$ делится на многочлен x^2+x-6?

4(5) Методом неопределённых коэффициентов разложите на множители выражение: $x^4-12x^3-12x^2+15x-2.$

Решите иррациональное уравнение:

5(2). $\sqrt{3x+43}-7=2x.$

6(4). $\sqrt{x-2}-\sqrt{7-x}=\sqrt{2x-11}.$

7(4). $\sqrt{5x-2}-\sqrt{3x-10}=\sqrt{x+4}.$

8(3). $\sqrt{x^2+6x+8}+\sqrt{x^2+5x+6}+\sqrt{x^2-5x-14}=0.$

Решите системы уравнений:

9(3). $\begin{cases}\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}=\dfrac{5}{6},\\ x^2-y^2=5.\end{cases}$ **10(3).** $\begin{cases}x^2+y=27,\\ y^2+x=27.\end{cases}$

11(3). $\begin{cases}2x^2+16xy-9y^2=36,\\ x^2+3xy-y^2=12.\end{cases}$

12(3). $\begin{cases}x^2-x+y^2-y=42,\\ 5x+xy+5y=-31.\end{cases}$

13(4). $\begin{cases}10\left(x^4+y^4\right)=-17\left(x^3y+xy^3\right),\\ x^2+y^2=5.\end{cases}$

14*(8). $\begin{cases}x^2y+y+xy^2+x=18xy,\\ x^4y^2+y^2+x^2y^4+x^2=208x^2y^2.\end{cases}$