

МАТЕМАТИКА

Стереометрия

Задание №4 для 11-х классов

(2006-2007 учебный год)

§1. Векторы в пространстве.

Координатный метод решения задач стереометрии

Вектором называется направленный отрезок, и буквально так же, как и на плоскости, определяются основные понятия: абсолютная величина (длина) вектора, равенство векторов, угол между векторами.

Напомним некоторые отличия, связанные с трехмерностью пространства, и важные для приложений понятия и утверждения.

1°. В трехмерном пространстве вектор имеет три координаты: если в прямоугольной декартовой системе координат точка $A_1(x_1, y_1, z_1)$ – его начало, а точка $A_2(x_2, y_2, z_2)$ – его конец, то координатами вектора $\overrightarrow{A_1A_2}$ называют числа $x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1$. Записывается

$$\overrightarrow{A_1A_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

2°. Арифметические действия – сумма векторов $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ и произведение вектора \vec{a} на число λ определяются аналогично двумерному случаю:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}(a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3),$$

$$\lambda \vec{a} = \vec{d}(\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)$$

и сохраняются все свойства этих операций.

3°. Длина вектора $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ вычисляется по формуле

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

4°. Два ненулевых вектора называются коллинеарными, если они параллельны одной прямой.

Вектор \vec{b} коллинеарен ненулевому вектору \vec{a} тогда и только тогда, когда существует число λ такое, что $\vec{b} = \lambda \vec{a}$. У коллинеарных векторов соответствующие координаты пропорциональны. И обратно, если у двух векторов соответствующие координаты пропорциональны, то векторы коллинеарны.

5°. Скалярное произведение векторов $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ определяется равенством

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

Скалярное произведение двух векторов равно произведению их абсолютных величин на косинус угла между этими векторами:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\angle \vec{a}\vec{b})$$

(здесь $\vec{a}\vec{b}$ угол между векторами \vec{a} и \vec{b}).

Отсюда следует, что длина отрезка AB находится по известному вектору \vec{AB} по формуле

$$AB = \sqrt{\vec{AB} \cdot \vec{AB}}.$$

6°. Два ненулевых вектора \vec{a} и \vec{b} перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0.$$

I. Угол между прямыми

Углом между прямыми a и b называется угол между пересекающимися прямыми, соответственно параллельными двум данным. Угол между прямыми измеряется от 0 до 90° . Если \vec{a} и \vec{b} – ненулевые векторы, лежащие на прямых a и b , и φ – угол между этими прямыми, то

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

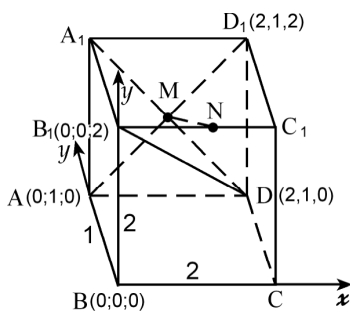


Рис.1

Задача 1. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, в котором $AB = 1$, $AD = 2$, $AA_1 = 2$. Точка M – середина диагонали AD_1 грани $AA_1 D_1 D$, точка N – середина ребра $B_1 C_1$. Найти

угол, который образует диагональ параллелепипеда $B_1 D$ с а) прямой AD_1 , б) прямой MN .

Δ Введем прямоугольную систему координат с началом координат в точке B , как показано на рис. 1. Определяем координаты точек B_1 , D , A , D_1 , M и N и находим координаты векторов $\vec{B_1 D}$, $\vec{AD_1}$ и \vec{MN} :

$$B_1(0;0;2), D(2;1;0) \Rightarrow \vec{B_1 D} = (2; 1; -2);$$

$$A(0;1;0), D_1(2;1;2) \Rightarrow \vec{AD_1} = (2; 0; 2);$$

$$M(1;1;1), N(1;0;2) \Rightarrow \vec{MN} = (0; -1; 1)$$

Так как $\vec{B_1 D} \cdot \vec{AD_1} = 0$, то $B_1 D \perp AD_1$, угол между прямыми $B_1 D$ и AD_1 равен 90° .

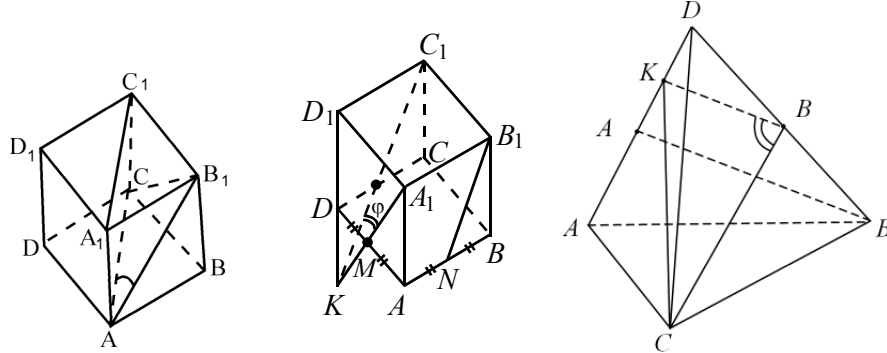
Если φ – угол между прямыми MN и $B_1 D$, то

$$\cos \varphi = \frac{\left| \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{B_1D} \right|}{\left| \overrightarrow{MN} \right| \cdot \left| \overrightarrow{B_1D} \right|} = \frac{\left| -3 \right|}{\left| \sqrt{2} \cdot 3 \right|} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

значит прямые MN и BD_1 образуют угол 45° . ▲

Замечание 1. При координатном методе решения удобно делать большой рисунок и координаты соответствующих точек выписывать на этом рисунке. Как правило, ошибок бывает меньше.

Замечание 2. В ряде задач угол между прямыми в пространстве все же удобнее находить как равный ему угол треугольника, который образуется при параллельном переносе одной прямой до пересечения с другой. Вот два примера с кубом (ребро куба равно a) и один с тетраэдром.



а) Угол между прямыми AB_1 и A_1C_1 равен углу CAB_1 (т.к. $AC \parallel A_1C_1$) и равен 60° ($\triangle AB_1C$ – правильный).

б) Угол между прямыми A_1M и B_1N (M и N – середины ребер) равен углу C_1KA_1 ($C_1K \parallel B_1N$), $D_1K = 2a$, $C_1K = A_1K = a\sqrt{5}$, $A_1C_1 = a\sqrt{2}$, по теореме косинусов $\cos \varphi = \frac{4}{5}$.

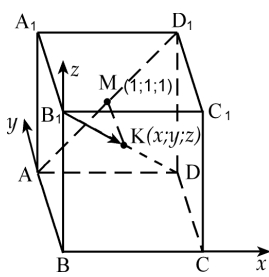
в) Например, в тетраэдре $DABC$ точки A_1 и B_1 – середины ребер AD и BD . Чтобы найти угол φ между скрещивающимися прямыми CB_1 и BA_1 проводят $B_1K \parallel BA_1$, тогда $\cos \varphi = \left| \cos(\angle KB_1C) \right|$. Косинус угла находят по теореме косинусов из треугольника KB_1C .

II. Расстояние от точки до прямой

Расстоянием от точки до прямой называется длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на прямую.

Задача 2. В условиях задачи 1 найти расстояние от точки M до прямой B_1D .

Δ Предположим, что точка K лежит на прямой B_1D и $MK \perp B_1D$. Требуется найти длину отрезка MK . Пусть $(x; y; z)$ – координаты точки



K . Вектор $\overrightarrow{B_1K}$ коллинеарен вектору $\overrightarrow{B_1D}$, т.е. $\overrightarrow{B_1K} = \lambda \overrightarrow{B_1D}$.

Имеем: $B_1(0; 0; 2)$, $\overrightarrow{B_1K}(x; y; z - 2)$ и $\overrightarrow{B_1D}(2; 1; -2)$. Из равенства, $\overrightarrow{B_1K} = \lambda \overrightarrow{B_1D}$, т.е. $(x; y; z - 2) = \lambda(2; 1; -2)$ следует $x = 2\lambda$, $y = \lambda$, $z - 2 = -2\lambda$. Вектор $\overrightarrow{MK}(x - 1; y - 1; z - 1)$ перпендикулярен вектору $\overrightarrow{B_1D}(2; 1; -2)$, их скалярное произведение равно нулю, поэтому

$$2(x - 1) + (y - 1) - 2(z - 1) = 0.$$

Подставляем сюда $x = 2\lambda$, $y = \lambda$, $z = 2 - 2\lambda$, находим $\lambda = \frac{5}{9}$, тогда

$K\left(\frac{10}{9}; \frac{5}{9}; \frac{8}{9}\right)$ и координаты вектора \overrightarrow{MK} таковы: $x - 1 = 2\lambda - 1 = \frac{1}{9}$, $y - 1 = \lambda - 1 = -\frac{4}{9}$, $z - 1 = (2 - 2\lambda) - 1 = 1 - 2\lambda = -\frac{1}{9}$, $\overrightarrow{MK}\left(\frac{1}{9}; -\frac{4}{9}; -\frac{1}{9}\right)$.

Определим длину вектора \overrightarrow{MK} , т.е. расстояние от точки M до прямой

B_1D : $|\overrightarrow{MK}| = MK = \sqrt{\frac{16 + 1 + 1}{81}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$. Заметим, что также определено и положение точки K , известны ее координаты и, например, можно найти $B_1K : B_1D = \frac{5}{9}$. ▲

III. Уравнение плоскости. Угол между плоскостями. Угол между прямой и плоскостью

В прямоугольной системе координат плоскость задается уравнени-

ем $ax + by + cz + d = 0$, причем вектор $\vec{n}(a; b; c)$ перпендикулярен этой плоскости (его называют нормалью к плоскости).

Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}(a; b; c)$ в векторной форме имеет вид $\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = 0$ (здесь $M(x; y; z)$ – произвольная точка этой плоскости), а в координатной форме

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

Угол между плоскостями

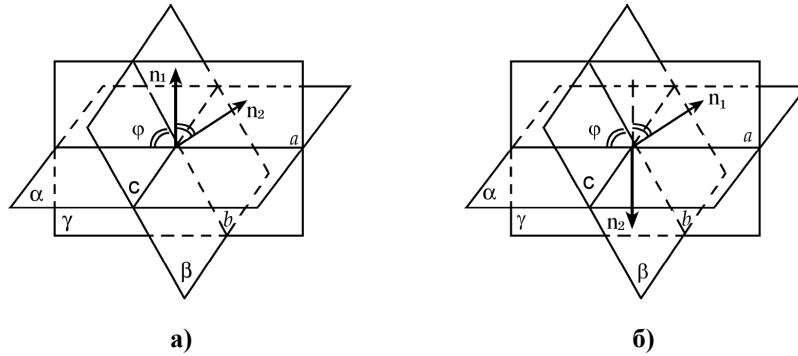


Рис. 3

Пусть плоскости α и β пересекаются по прямой c . Плоскость γ перпендикулярна прямой c и пересекает плоскости α и β по прямыми a и b . Угол между прямыми a и b называется углом между плоскостями α и β . Как и угол между прямыми, он лежит в диапазоне от 0 до 90° . Угол между плоскостями либо равен углу между векторами, перпендикулярными плоскостям (рис. 3а), либо дополняет его до 180° . В обоих случаях $\cos \varphi = |\cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2)|$. Итак, векторы $\vec{n}_1(a_1, b_1, c_1)$ и $\vec{n}_2(a_2, b_2, c_2)$ соответственно перпендикулярны плоскостям

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \text{ и } a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0,$$

угол между этими плоскостями определяется из равенства

$$\cos \varphi = |\cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2)| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}. \quad (1)$$

Задача 3. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром 1. Точка M – середина ребра AB , точка K – середина ребра DD_1 . Найти угол между плоскостями AKB_1 и KMC .

Δ Введем прямоугольную систему координат, поместив начало координат в точку A , как показано на рис. 4.

Составим уравнение плоскости AKB_1 . Пусть оно имеет вид

$$ax + by + cz + d = 0. \quad (2)$$

Точка $A(0;0;0)$ принадлежит этой плоскости, следовательно $d = 0$.

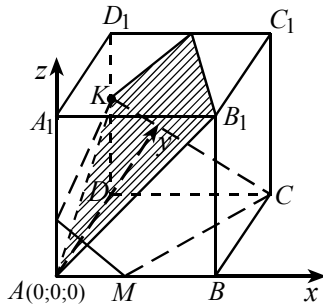


Рис. 4

Подставим координаты точек $K\left(0;1;\frac{1}{2}\right)$ и $B_1(1;0;1)$ в уравнение (2) при $d = 0$, получим $b + \frac{c}{2} = 0$ и $a + c = 0$. Таким образом $b = -\frac{c}{2}$, $a = -c$ и уравнение (2) принимает вид $-cx - \frac{c}{2}y + cz = 0$. Сокращая на c и умножая на (-2) , приведем уравнение к виду $2x + y - 2z = 0$.

Составим уравнение плоскости KMC . Пусть оно имеет вид

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0. \quad (3)$$

Подставляем координаты точек $K\left(0;1;\frac{1}{2}\right)$, $M\left(\frac{1}{2};0;0\right)$ и $C(1;1;0)$, по-

лучаем систему

$$\begin{cases} b_1 + \frac{c_1}{2} + d_1 = 0, \\ \frac{a_1}{2} + d_1 = 0, \\ a_1 + b_1 + d_1 = 0. \end{cases}$$

Вычтя из третьего уравнение второе, будем иметь $\frac{a_1}{2} + b_1 = 0$, т. е. $b_1 = -\frac{a_1}{2}$. Из второго уравнения следует $d_1 = -\frac{a_1}{2}$, тогда из первого уравнения получим $c_1 = 2a_1$. Уравнение (3) принимает вид $a_1x - \frac{a_1}{2}y + 2a_1z - \frac{a_1}{2} = 0$ или $2x - y + 4z = 1$.

Итак, $\vec{n}_1(2;1;-2)$, $|\vec{n}_1| = 3$, $\vec{n}_2(2;-1;4)$, $|\vec{n}_2| = \sqrt{21}$ и угол между плоскостями AKB_1 и KMC находим из равенства

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|-5|}{3\sqrt{21}},$$

$$\varphi = \arccos \frac{5}{3\sqrt{21}}.$$

Заметим, что для определения угла между плоскостями координатным способом построение сечений не предусматривается. На рис. 4 сечения изображены для полноты картины. ▲

Угол между прямой и плоскостью

Углом между прямой, наклоненной к плоскости, и этой плоскостью называется угол между прямой и ее перпендикулярной проекцией на эту плоскость. Если прямая перпендикулярна плоскости, то угол между ними равен 90° , если прямая и плоскость параллельны, угол между ними равен 0 .

Пусть прямая a образует с плоскостью α угол φ (рис. 5), \vec{a} – ненулевой вектор, лежащий на прямой a и пусть угол между векторами \vec{a} и \vec{n} равен ψ . Либо $\varphi + \psi = 90^\circ$ (когда $0 \leq \psi \leq 90^\circ$), либо $\psi - \varphi = 90^\circ$ (когда $90^\circ < \psi < 180^\circ$), но в обоих случаях $\sin \varphi = |\cos \psi|$, т. е.

$$\sin \varphi = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{a}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{a}|}.$$

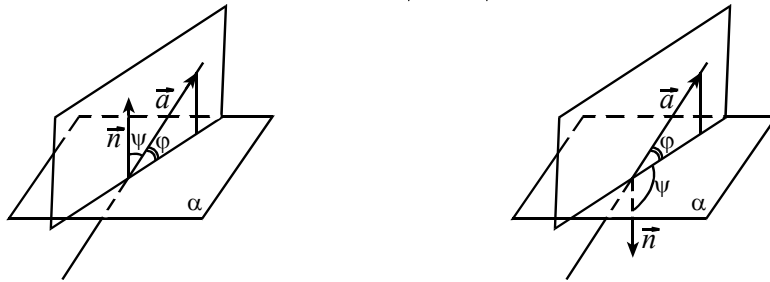


Рис. 5

Итак, если вектор $\vec{n}(a; b; c)$ перпендикулярен плоскости α , то угол φ между этой плоскостью и прямой a , проходящей через точки A и B , определяется из равенства

$$\sin \varphi = \left| \cos(\vec{n}, \overrightarrow{AB}) \right| = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB}|}{|\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{AB}|}. \quad (4)$$

Задача 4. В условиях задачи 3 найти угол между прямой KM и плоскостью AKB_1 .

Δ Плоскость AKB_1 в рассматриваемой системе координат имеет уравнение вида $2x + y - 2z = 0$, вектор $\vec{n}(2; 1; -2)$, $|\vec{n}| = 3$. На прямой KM рассмотрим вектор $\overrightarrow{KM} : K\left(0; 1; \frac{1}{2}\right)$, $M\left(\frac{1}{2}; 0; 0\right)$, $\overrightarrow{KM}\left(\frac{1}{2}; -1; -\frac{1}{2}\right)$,

$|\overrightarrow{KM}| = \sqrt{\frac{3}{2}}$. Угол φ между прямой KM и плоскостью AKB_1 находим

по формуле
$$\sin \varphi = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{KM}|}{|\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{KM}|} = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}, \quad \varphi = \arcsin \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}. \quad \blacktriangle$$

IV. Расстояние от точки до плоскости

Пусть плоскость α параллельна плоскости β , прямая b лежит в плоскости β , точка B лежит на прямой b (рис. 6). Очевидно, что расстояние от точки B до плоскости α равно расстоянию от прямой b до плоскости α и равно расстоянию между плоскостями α и β .

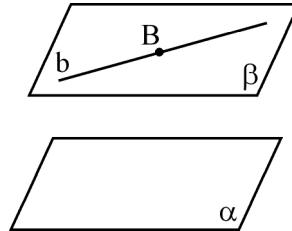


Рис. 6

Рассмотрим две скрещивающиеся прямые a и b . Проведем через прямую a плоскость α , параллельную прямой b (рис. 7). Через прямую b проведем плоскость, перпендикулярную

плоскости α , пусть линия пересечения этих плоскостей b_1 (эта прямая есть проекция прямой b на плоскость α). Точку пересечения прямых a и b_1 обозначим A . Точка A является проекцией некоторой точки B прямой b . Из того, что $AB \perp \alpha$ следует, что $AB \perp a$ и $AB \perp b_1$; кроме того, $b \parallel b_1$, значит $AB \perp b$. Прямая AB пересекает скрещивающиеся прямые a и b и перпендикулярна и той, и другой.

Отрезок AB называется *общим перпендикуляром* двух скрещивающихся прямых a и b .

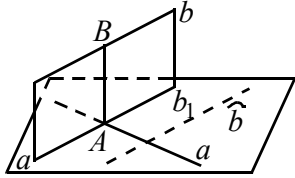


Рис. 7
плоскости.

Длина общего перпендикуляра скрещивающихся прямых равна расстоянию между этими прямыми и равна расстоянию от любой точки прямой b до плоскости α . Задача нахождения расстояния между двумя скрещивающимися прямыми не требует построения их общего перпендикуляра и совпадает с задачей определения расстояния от точки до

Задача 5. Найти расстояние от точки $M(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$. Δ

Пусть прямая, проходящая через точку M перпендикулярно плоскости α , пересекает ее в точке K с координатами $(x; y; z)$. Вектор \overline{MK} перпендикулярен плоскости α , как и вектор $\vec{n}(A; B; C)$, т. е. векторы \overline{MK} и \vec{n} — коллинеарны, $\overline{MK} = \lambda \vec{n}$.

Так как $\overline{MK}(x - x_0; y - y_0; z - z_0)$ и $\vec{n}(A; B; C)$, то $x - x_0 = \lambda A$,
 $y - y_0 = \lambda B$, $z - z_0 = \lambda C$.

Точка K лежит в плоскости α , ее координаты удовлетворяют уравнению плоскости.

Подставляем $x = x_0 + \lambda A$, $y = y_0 + \lambda B$,
 $z = z_0 + \lambda C$ в уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$, получаем

$$A(x_0 + \lambda A) + B(y_0 + \lambda B) + C(z_0 + \lambda C) + D = 0,$$

$$\text{откуда } \lambda = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{A^2 + B^2 + C^2}.$$

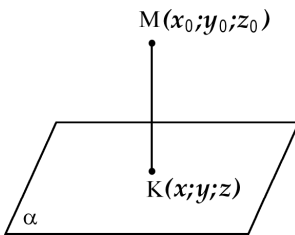


Рис. 8

Находим длину вектора \overline{MK} которая и равна расстоянию от точки $M(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$:

$$|\overline{MK}| = |\lambda \vec{n}| = |\lambda| \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Итак, расстояние h от точки $M(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ таково

$$h = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad (5)$$

Например, расстояние h от точки $M(2; -3; 1)$ до плоскости $x - 2y + 2z - 1 = 0$

равно

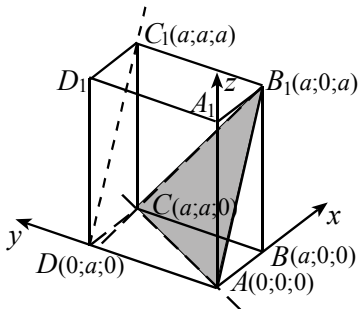
$$h = \frac{|2 - 2(-3) + 2 \cdot 1 - 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = 3. \blacktriangle$$

Задача 6. Ребро куба равно a . Найти расстояние между прямыми, на которых лежат скрещивающиеся диагонали двух смежных граней куба. Δ Рассмотрим, например, прямые, на которых лежат диагонали AC и DC_1 граней куба (рис. 9).

Диагональ AB_1 грани AA_1B_1B параллельна прямой DC_1 , поэтому прямая DC_1 параллельна плоскости AB_1C . Расстояние между скрещивающимися прямыми DC_1 и AC равно расстоянию от прямой DC_1 до плоскости AB_1C и равно расстоянию от любой точки прямой DC_1 до плоскости AB_1C .

Введем прямоугольную систему координат с началом координат в точке A так, как показано на рис. 9 и вычислим координаты отмеченных точек.

Пусть уравнение плоскости AB_1C (будем также обозначать ее α) $kx + by + cz + d = 0$ (не используем букву a , поскольку она обозначает ребро куба).



$$A(0;0;0) \in \alpha \Rightarrow d = 0;$$

$$C(a;a;0) \in \alpha \Rightarrow ka + ba = 0 \Rightarrow b = -k;$$

$$B_1(a;0;a) \in \alpha \Rightarrow ka + ca = 0 \Rightarrow c = -k.$$

Подставляем значения коэффициентов в уравнение плоскости: $kx - ky - kz = 0$, сокращая на k , получим $x - y - z = 0$.

Найдем расстояние h от точки $D(0;a;0)$ прямой DC_1 до этой плоскости по формуле (5):

$$\text{Рис. 9} \quad h = \frac{|0 - a + 0|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{a}{\sqrt{3}},$$

и есть искомое расстояние между скрещивающимися прямыми DC_1 и AC .

Приведем другое решение этой задачи, другой метод определения расстояния от точки (прямой) до плоскости, не используя координаты, но простой и часто применяемый. Он основан на вычислении объема треугольной пирамиды двумя способами. Рассмотрим треугольную пирамиду AB_1CD (рис. 9). Искомое расстояние от точки D до плоскости AB_1C равно высоте h этой пирамиды, опущенной из вершины D , по-

этому для пирамиды AB_1CD ее объем $V = \frac{1}{3}S_{AB_1C}h$.

Треугольник AB_1C правильный со стороной $a\sqrt{2}$, его площадь равна $\frac{(a\sqrt{2})^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2$. Итак, $V = \frac{\sqrt{3}}{6}a^2h$.

Объем V этой же пирамиды легко вычисляется, если в качестве основания рассмотреть грань ACD , так как $S_{ACD} = \frac{1}{2}a^2$, а высота пирамиды, опущенная из вершины B_1 на плоскость ACD , очевидно, равна $BB_1 = a$. Находим $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}a^2a = \frac{a^3}{6}$.

Из равенства $\frac{\sqrt{3}}{6}a^2h = \frac{a^3}{6}$ определяем $h = \frac{a}{\sqrt{3}}$. ▲

Из равенства $\frac{\sqrt{3}}{6}a^2h = \frac{a^3}{6}$ определяем $h = \frac{a}{\sqrt{3}}$. ▲

§2. Векторный метод решения задач стереометрии без использования прямоугольных координат

Напомним следующую теорему о векторах одной плоскости (теорема о разложении):

Пусть векторы \vec{a} и \vec{b} не коллинеарны, тогда для любого вектора \vec{c} , лежащего в одной плоскости с векторами \vec{a} и \vec{b} , существует единственная пара чисел x и y таких, что $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$.

□ Приведем векторы \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} к одному началу – точке O , через конец вектора c проведем прямые, параллельные векторам \vec{a} и \vec{b} (рис. 10), тогда $\vec{OA} = x\vec{a}$, $\vec{OB} = y\vec{b}$, $\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{OB}$, т. е. $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$. Если предположить, что возможно другое разложение $\vec{c} = x_1\vec{a} + y_1\vec{b}$, то должно выполняться равенство $(x - x_1)\vec{a} + (y - y_1)\vec{b} = \vec{0}$. Если $x - x_1 \neq 0$, то

$$\vec{a} = -\frac{y - y_1}{x - x_1} \vec{b}.$$

Это означает коллинеарность векторов \vec{a} и \vec{b} , что неверно, значит, $x - x_1 = 0$. По той же причине $y - y_1 = 0$. ■

Эта теорема верна и в том случае, когда векторы \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} параллельны одной плоскости (также приводим их к общему началу).

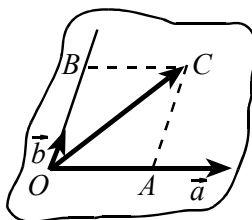


Рис. 10

Из теоремы о разложении следует: пусть точки A, B и C не лежат на одной прямой, тогда для того, чтобы точка D лежала в плоскости ABC , необходимо и достаточно, чтобы существовала пара чисел x и y такая, что $\vec{AD} = x\vec{AB} + y\vec{AC}$ (см. рис. 11).

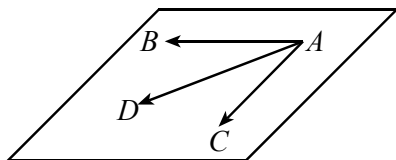


Рис. 11

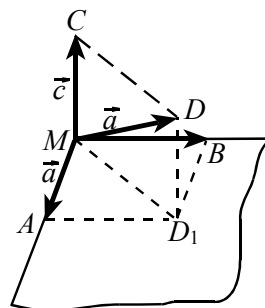
$x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{0}$ верно только при $x = y = z = 0$.

□ Например, если $z \neq 0$, то $\vec{c} = -\frac{x}{z}\vec{a} - \frac{y}{z}\vec{b}$, что означает, что вектор \vec{c} лежит в одной плоскости с векторами \vec{a} и \vec{b} . Поэтому $z = 0$. По той же причине $x = 0$ и $y = 0$.

Теорема 2 (о разложении). Пусть три векто-

Для применения векторного метода в пространстве нужны следующие две теоремы:

Теорема 1. Если векторы \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} отложены от одной точки и не лежат в одной плоскости, то равенство



ра \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} не лежат в одной плоскости. Тогда для любого вектора \vec{d} существует единственная тройка чисел x, y, z таких, что $\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$.

Рис. 12

□ Отложим все четыре вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и \vec{d} от общей точки M (рис. 12). Векторы $\vec{MA} = \vec{a}$, $\vec{MB} = \vec{b}$, $\vec{MC} = \vec{c}$ не лежат в одной плоскости поэтому плоскости MAB , MAC , MBC различны. Если точка D попала на одну из них, например, на плоскость MAB , то $\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b}$, т. е. $\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + 0\vec{c}$. Если же точка D не принадлежит ни одной из этих плоскостей, то проведем через точку D прямую, параллельную вектору \vec{MC} . Пусть D_1 – точка ее пересечения с плоскостью MAB . По правилу сложения векторов $\vec{MD} = \vec{MD}_1 + \vec{D_1D}$, по теореме о разложении на плоскости $\vec{MD}_1 = x\vec{a} + y\vec{b}$; из коллинеарности векторов $\vec{D_1D}$ и \vec{c} следует $\vec{D_1D} = z\vec{c}$, поэтому

$$\vec{d} = \vec{MD} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}.$$

Предположение, что есть другое разложение $\vec{d} = x_1\vec{a} + y_1\vec{b} + z_1\vec{c}$, приведет к равенству

$$(x - x_1)\vec{a} + (y - y_1)\vec{b} + (z - z_1)\vec{c} = 0.$$

По предыдущей теореме это равенство возможно только лишь при $x - x_1 = 0$, $y - y_1 = 0$, $z - z_1 = 0$. Значит $x = x_1$, $y = y_1$, $z = z_1$. Разложение единственно. ■

Задача 7. $ABCA_1B_1C_1$ – треугольная призма с основанием ABC . До-

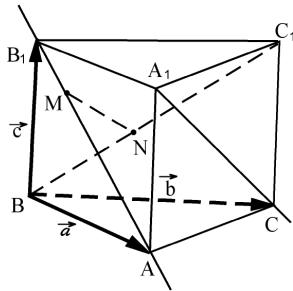


Рис. 13

казать, что на прямых AB_1 и BC_1 есть такие точки M и N , что прямая MN параллельна прямой A_1C . Найти отношение $MN : A_1C$.

△ Пусть M – точка на AB_1 , N – точка на BC_1 (рис. 13). Прямые MN и A_1C параллельны тогда и только тогда, когда векторы \vec{MN} и $\vec{A_1C}$ коллинеарны, т. е. $\vec{MN} = \lambda \vec{A_1C}$. Разложим эти векторы по векторам $\vec{a} = \vec{BA}$, $\vec{b} = \vec{BC}$ и

$\vec{c} = \vec{BB_1}$, не лежащим в одной плоскости. Имеем:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB_1} &= \vec{c} - \vec{a}, \quad \overrightarrow{AM} \parallel \overrightarrow{AB_1} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = x(\vec{c} - \vec{a}); \\
\overrightarrow{BC_1} &= \vec{b} + \vec{c}, \quad \overrightarrow{BN} \parallel \overrightarrow{BC_1} \Rightarrow \overrightarrow{BN} = y(\vec{b} + \vec{c}); \\
\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = -\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BN} \Rightarrow \\
\Rightarrow \overrightarrow{MN} &= -x(\vec{c} - \vec{a}) - \vec{a} + y(\vec{b} + \vec{c}) = (x-1)\vec{a} + y\vec{b} + (y-x)\vec{c}; \\
\overrightarrow{A_1C} &= \overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{AC} = -\vec{c} + (\vec{b} - \vec{a}) = -\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}.
\end{aligned}$$

Предположим, что точки M и N таковы, что $MN \parallel A_1C$, т. е. $\overrightarrow{MN} = \lambda \overrightarrow{A_1C}$, тогда имеет место равенство

$$(x-1)\vec{a} + y\vec{b} + (y-x)\vec{c} = -\lambda\vec{a} + \lambda\vec{b} - \lambda\vec{c}.$$

В силу единственности разложения вектора по трем векторам, не лежащим в одной плоскости, следует равенство коэффициентов разложения

$$x-1 = -\lambda, \quad y = \lambda, \quad y-x = -\lambda.$$

Эта система имеет единственное решение $\lambda = \frac{1}{3}$, $x = \frac{2}{3}$, $y = \frac{1}{3}$, значит прямая MN будет параллельна прямой A_1C только в том случае, когда $AM = \frac{2}{3}AB_1$ и $BN = \frac{1}{3}BC_1$. Из $\overrightarrow{MN} = \lambda \overrightarrow{A_1C}$ следует

$$|\overrightarrow{MN}| = |\lambda| \cdot |\overrightarrow{A_1C}|, \text{ т. е. } MN = \frac{1}{3}A_1C, \text{ откуда } MN : A_1C = 1 : 3. \blacktriangle$$

Задача 8. В условиях предыдущей задачи найти длину отрезка MN , если в основании лежит равнобедренный прямоугольный треугольник ABC , $AB = BC = 2$, $\angle B = 90^\circ$, а ребро $BB_1 = 1$ и образует равные углы по 60° с ребрами AB и BC .

Δ Данные задачи определяют длины векторов \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} и углы между ними, это позволяет вычислить скалярные произведения $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{a} \cdot \vec{c}$ и $\vec{b} \cdot \vec{c}$. Имеем:

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = 2, \quad |\vec{c}| = 1,$$

$$1) \vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0;$$

2) углы между векторами \vec{a} и \vec{c} и векторами \vec{b} и \vec{c} равны 60° , поэтому

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = |\vec{a}| \cdot |\vec{c}| \cos 60^\circ = 1 \text{ и } \vec{b} \cdot \vec{c} = |\vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cos 60^\circ = 1.$$

Из решения задачи 7 известно разложение вектора \overrightarrow{MN} по векторам \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} :

$$\overrightarrow{MN} = -\lambda\vec{a} + \lambda\vec{b} - \lambda\vec{c} = -\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{c}.$$

$$\begin{aligned} \text{Так как } |\overrightarrow{MN}|^2 &= \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MN} = \frac{1}{9}(-\vec{a} + \vec{b} - \vec{c})(-\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}) = \\ &= \frac{1}{9}(\vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} + \vec{c} \cdot \vec{c} - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{a} \cdot \vec{c} - 2\vec{b} \cdot \vec{c}) = \\ &= \frac{1}{9}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{a} \cdot \vec{c} - 2\vec{b} \cdot \vec{c}) = \\ &= \frac{1}{9}(4 + 4 + 1 - 0 + 2 \cdot 1 - 2 \cdot 1) = 1, \end{aligned}$$

то $MN = \sqrt{|\overrightarrow{MN}|^2} = 1$. \blacktriangle

Замечание. Если в условиях задач 7 – 8 требовалось бы найти расстояние между прямыми AB_1 и BC_1 , то, расположив точки K и P на AB_1 и BC_1 , надо разложить вектор \overrightarrow{KP} по векторам \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} , а затем использовать условия $KP \perp AB_1$ и $KP \perp BC_1$, которые равносильны условиям $\overrightarrow{KP} \cdot \overrightarrow{AB_1} = 0$ и $\overrightarrow{KP} \cdot \overrightarrow{BC_1} = 0$.

Задача 9. В тетраэдре $ABCD$ имеют место равенства $AB = BC$ и $AD = DC$. Доказать, что ребра AC и BD перпендикулярны.

Δ Выберем тройку векторов, не лежащих в одной плоскости:

$$\vec{a} = \overrightarrow{BA}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{BC}, \quad \vec{c} = \overrightarrow{BD}.$$

Разложим векторы \overrightarrow{AD} , \overrightarrow{CD} и \overrightarrow{AC} по этим векторам:

$$\overrightarrow{AD} = \vec{c} - \vec{a};$$

$$\overrightarrow{CD} = \vec{c} - \vec{b};$$

Известно, что $AB = BC$, т. е. $|\vec{a}| = |\vec{b}|$, и $AD = DC$,

т. е. $|\vec{c} - \vec{a}| = |\vec{c} - \vec{b}|$. Требуется доказать, что

$$AC \perp BD, \text{ т. е. } \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}.$$

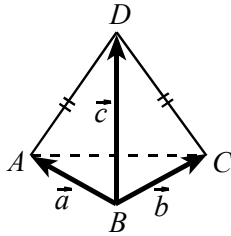


Рис. 14

Это означает, что надо установить, что $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$.

Из $|\vec{c} - \vec{a}| = |\vec{c} - \vec{b}|$ следует $(\vec{c} - \vec{a})^2 = (\vec{c} - \vec{b})^2$,

$$\vec{c}^2 - 2\vec{a}\vec{c} + \vec{a}^2 = \vec{c}^2 - 2\vec{b}\vec{c} + \vec{b}^2.$$

Учитывая, что $\vec{a}^2 = \vec{b}^2$ получаем $\vec{a}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}$, т. е. $\vec{c}(\vec{a} - \vec{b}) = 0$. Поскольку $\vec{c} = \overrightarrow{BD}$ и $\vec{a} - \vec{b} = \overrightarrow{AC}$, то $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$, т.е. $BD \perp AC$. \blacktriangle

Следствие. В правильной треугольной пирамиде, в частности, у правильного тетраэдра, противоположные ребра перпендикулярны.

Задача 10. Точки M и N – середины ребер тетраэдра $ABCD$ (рис. 15), точка P взята на ребре AD так, что $AP : AD = 2 : 3$. Найти, в каком отношении плоскость MNP делит ребро BC .

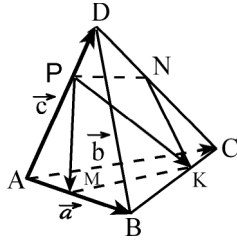


Рис. 15
векторам

Δ Пусть плоскость MNP пересекает ребро BC в точке K . Точка K лежит в плоскости MNP тогда и только тогда, когда существуют числа x и y такие, что

$$\overrightarrow{PK} = x\overrightarrow{PM} + y\overrightarrow{PN}. \quad (5)$$

Выберем тройку векторов $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$ и $\vec{c} = \overrightarrow{AD}$, разложим векторы \overrightarrow{PK} , \overrightarrow{PM} и \overrightarrow{PN} по этим

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\vec{a}, \quad \overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\vec{c},$$

тогда

$$\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{c},$$

$$\overrightarrow{PD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\vec{c}, \quad \overrightarrow{DN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{c}),$$

поэтому

$$\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{DN} = \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{6}\vec{c}.$$

Далее

$$\overrightarrow{PK} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BK}, \quad \overrightarrow{PA} = -\overrightarrow{AP} = -\frac{2}{3}\vec{c},$$

а стоящий в этой сумме вектор \overrightarrow{BK} коллинеарен вектору \overrightarrow{BC} , т. е. $\overrightarrow{BK} = \lambda\overrightarrow{BC} = \lambda(\vec{b} - \vec{a})$.

Находим

$$\overrightarrow{PK} = -\frac{2}{3}\vec{c} + \vec{a} + \lambda(\vec{b} - \vec{a}) = (1-\lambda)\vec{a} + \lambda\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{c}.$$

Подставляя полученные выражения в (5), получим

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PK} &= (1-\lambda)\vec{a} + \lambda\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{c} = x\left(\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{c}\right) + y\left(\frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{6}\vec{c}\right) = \\ &= \frac{x}{2}\vec{a} + \frac{y}{2}\vec{b} - \left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{6}y\right)\vec{c}. \end{aligned}$$

В силу единственности разложения вектора коэффициенты разложения равны, т. е.

$$\begin{cases} 1-\lambda = \frac{x}{2}, \\ \lambda = \frac{y}{2}, \\ \frac{2}{3} = \frac{2}{3}x + \frac{1}{6}y. \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение $x = \frac{2}{3}$, $y = \frac{4}{3}$, $\lambda = \frac{2}{3}$. Значит,

$\overrightarrow{BK} = \lambda\overrightarrow{BC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$, точка K лежит на ребре BC и делит его в отношении $BK : KC = 2 : 1$. ▲

§3. Сфера и многоугольники

В прямоугольной системе координат сфера с центром в точке $C(x_0, y_0, z_0)$ и радиусом R задается уравнением

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2.$$

Задача 11. $SABCD$ – правильная четырехугольная пирамида. Найти радиус сферы, проходящей через вершину пирамиды S , середину ребра AD , точку M пересечения медиан грани CDS и вершину A , если сторона основания равна 2, а высота пирамиды равна 1.

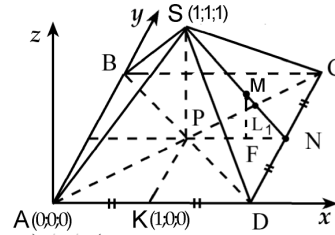


Рис. 16

Δ В основании пирамиды лежит квадрат $ABCD$ со стороной 2, вершина S проектируется в центр основания (рис. 16). Введем прямоугольную систему координат, выбрав начало координат в точке A , совместив ось x с прямой AD , а ось y – с прямой AB .

Предположим, что уравнение сферы в этой системе координат имеет уравнение

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2. \quad (6)$$

Ему удовлетворяют координаты точек $A(0; 0; 0)$, $K(1; 0; 0)$ – середина стороны AD , $S(1; 1; 1)$ и точки M – точки пересечения медиан грани CDS . Если $CN = DN$, то SN – медиана треугольника CDS и $MN = \frac{1}{3}SN$. Пусть $MF \parallel SP$, тогда $\Delta MNF \sim \Delta SNP$ и $\frac{MF}{SP} = \frac{FN}{PN} = \frac{MN}{SN}$, откуда $FN = \frac{1}{3}PN = \frac{1}{3}$ и $MF = \frac{1}{3}SP = \frac{1}{3}$. Итак, $M\left(\frac{5}{3}; 1; \frac{1}{3}\right)$.

Подставим координаты точек A , K , S и M в уравнение (6), получим систему

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = R^2; \\ (a - 1)^2 + b^2 + c^2 = R^2; \\ (a - 1)^2 + (b - 1)^2 + (c - 1)^2 = R^2; \\ \left(a - \frac{5}{3}\right)^2 + (b - 1)^2 + \left(c - \frac{1}{3}\right)^2 = R^2. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, найдем $a = \frac{1}{2}$, вычитая из второго уравнения третье, получим $b + c = 1$, а вычитая из третьего четвертое и подставляя $a = \frac{1}{2}$, получим $c = -\frac{1}{6}$. Итак, $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{7}{6}$, $c = -\frac{1}{6}$, из первого уравнения системы находим $R = \frac{\sqrt{59}}{6}$. \blacktriangle

Следует отметить, однако, что достаточно просто координатным методом решаются лишь некоторые задачи, а в большинстве задач приходится геометрически определять положение центра.

I. Сфера описана около многоугольника, если она проходит через каждую его вершину (многогранник вписан в сферу). Центр такой сферы равноудален от вершин.

Каждое ребро многогранника – хорда описанной сферы, поэтому центр описанной сферы – точка пересечения плоскостей, проходящих перпендикулярно ребрам через их середины.

Каждая грань вписанного многогранника вписана в окружность – сечение сферы плоскостью этой грани. Перпендикуляр из центра сферы на плоскость ее сечения проходит через центр окружности этого сечения.

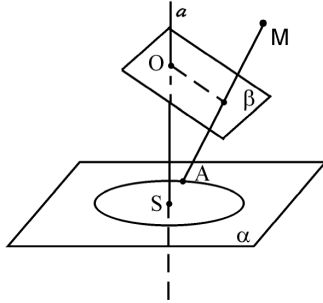


Рис. 17

Геометрическое место точек, равноудаленных от точки M и некоторой точки A окружности, есть плоскость β , перпендикулярная отрезку MA и проходящая через его середину.

Прямая a и плоскость β не параллельны (иначе точка M лежала бы в плоскости α), они пересекаются. Их точка пересечения – точка O – равноудалена и от точки M , и от всех точек окружности. ■

Отсюда следует, что около пирамиды можно описать сферу тогда и только тогда, когда около ее основания можно описать окружность, в частности

- а) около любой треугольной пирамиды можно описать сферу,
- б) около правильной пирамиды можно описать сферу.

Задача 12. В основании тетраэдра $ABCD$ лежит прямоугольный треугольник ABC , угол C прямой, ребро DA перпендикулярно плоскости ABC (рис. 18). Найти радиус описанной около этого тетраэдра сферы, если $AD = BC = 3$, $AC = 4$.

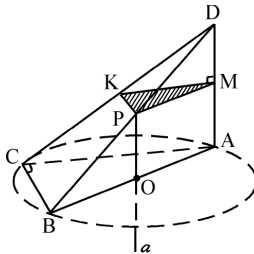


Рис. 18

Центр сферы, описанной около тетраэдра $ABCD$, лежит на прямой a , перпендикулярной основанию ABC и проходящей через центр окружности, описанной около треугольника ABC . Так как $\angle ACB = 90^\circ$, то AB – диаметр этой окружности, и центр ее – точка O – середина гипотенузы AB .

Значит, центр описанной сферы принадлежит всем перпендикулярам к граням, проведенным через центры описанных вокруг них окружностей.

Если окружность лежит в плоскости α , а точка M не принадлежит этой плоскости, то через эту окружность и точку M можно провести сферу.

□ Геометрическим местом точек, равноудаленных от всех точек окружности, есть прямая a , проходящая через центр окружности (рис. 17).

Центр сферы, проходящей через точки A и D лежит в плоскости, проходящей через середину M отрезка AD перпендикулярно ему. Легко видеть, что эта плоскость и прямая a пересекается в середине ребра BD – точке P . Точка P – центр сферы, ее радиус R равен $\frac{1}{2}BD$.

Находим: $BD^2 = AD^2 + AB^2 = AD^2 + (AC^2 + BC^2) = 34$, значит,

$$R = \frac{\sqrt{34}}{2}. \blacktriangle$$

Задача 13. В тетраэдре $ABCD$ ребро AC равно 6, ребро BD равно 8, все остальные ребра равны $\sqrt{74}$ (рис. 19). Найти радиус сферы, описанной около этого тетраэдра.

△ Пусть M и N – середины противоположных ребер BD и AC ; треугольники ABC и ADC – равные равнобедренные с основанием AC , поэтому $AC \perp BN$, $AC \perp DN$. Отсюда следует,

что плоскость BND перпендикулярна ребру AC и проходит через его середину, центр описанной сферы лежит в плоскости BND .

Треугольники BCD и BAD также равные равнобедренные с общим основанием BD , поэтому $CM \perp BD$, $AM \perp BD$, и плоскость CMA перпендикулярна ребру BD и проходит через его середину. Центр описанной сферы лежит в этой плоскости.

Плоскости BND и CMA пересекаются по прямой MN , центр O сферы лежит на этой прямой. Находим:

$$BN = ND = \sqrt{AB^2 - \left(\frac{AC}{2}\right)^2} = \sqrt{65},$$

$$MN = \sqrt{BN^2 - \left(\frac{BD}{2}\right)^2} = 7.$$

Из прямоугольного треугольника MOD имеем: $MO = \sqrt{R^2 - MD^2} = \sqrt{R^2 - 16}$, а из прямоугольного треугольника NOC выражаем: $ON = \sqrt{R^2 - CN^2} = \sqrt{R^2 - 9}$, тогда из $MN = MO + ON$ следует $\sqrt{R^2 - 16} + \sqrt{R^2 - 9} = 7$. Решая уравнение, находим $R = 5$.

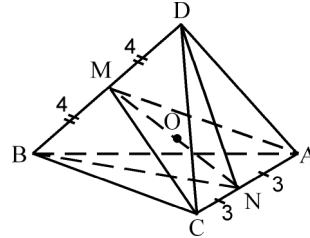


Рис. 19

Предположение о том, что точка O лежит не на отрезке MN , а на прямой MN вне его, приводит к одному из уравнений:

$$\sqrt{R^2 - 16} - \sqrt{R^2 - 9} = 7, \text{ либо } \sqrt{R^2 - 9} - \sqrt{R^2 - 16} = 7.$$

Первое из них не имеет смысла ($\sqrt{R^2 - 16} < \sqrt{R^2 - 9}$), а второе не имеет решений. \blacktriangle

II. Биссектором двугранного угла называется полуплоскость, которая принадлежит этому углу, имеет границей его ребро и разделяет угол на два двугранных угла равной величины.

Будем рассматривать углы меньше развернутого.

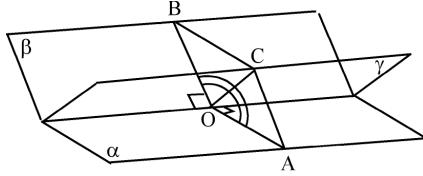


Рис. 20

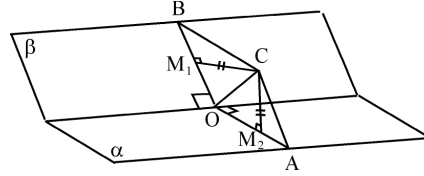


Рис. 21

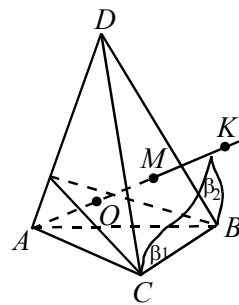
Биссектриса каждого линейного угла данного двугранного угла принадлежит его биссектору (на рис. 20 биссектор γ содержит биссектрису OC линейного угла AOB). Правило построения биссектора: через ребро угла и биссектрису его линейного угла.

Как и у биссектрисы плоского угла, точки биссектора обладают свойством равноудаленности от граней двугранного угла.

Биссектор двугранного угла есть геометрическое место точек внутри этого угла, равноудаленных от плоскостей его граней (рис.21).

III. Сфера вписана в многогранник, если она касается всех его граней. *Центр вписанной сферы равноудален от всех плоскостей граней на расстояние, равное радиусу.*

Следовательно, *центр вписанной сферы принадлежит биссекторам всех двугранных углов многогранника.* Обратно, если существует точка O , общая всем биссекторам, лежащая внутри многогранника, и она удалена от граней на расстояние r , то сфера с центром в точке O и радиуса r касается всех граней многогранника.



В любой тетраэдр можно вписать сферу и только одну.

□ Пусть β_1 – биссектор двугранного угла с ребром AC , а β_2 – биссектор двугранного угла с ребром

ом AC , а β_2 – биссектор двугранного угла с ребром

Рис. 22 ром AB (рис. 22). Эти биссекторы имеют общую точку A , следовательно, пересекутся по некоторому лучу AK . Каждая точка этого луча лежит на β_1 и поэтому равноудалена от плоскостей ACB и ACD , лежит на β_2 равноудалена от плоскостей ABC и ABD . Значит каждая точка луча AK равноудалена от трех граней: ABC , ACD и ABD и луч AK принадлежит биссектору двугранного угла при ребре AD .

Пусть луч AK пересекает грань BCD в точке M . Концы отрезка AM принадлежат разным граням двугранного угла при ребре BC , поэтому биссектор этого угла пересекает отрезок AM . Точка пересечения O лежит на луче AK и равноудалена от граней ABC , ACD , ABD . В то же время расстояния от точки O до плоскостей ABC и BCD равны, так как точка O принадлежит биссектору двугранного угла, образованного этими плоскостями. Таким образом, точка O равноудалена от всех граней тетраэдра, а сфера с центром в точке O и радиусом, равным расстоянию от точки O до грани тетраэдра, вписана в тетраэдр. Точка O определяется единственным образом. ■

Задача 14. В основании тетраэдра $ABCD$ лежит прямоугольный треугольник ABC , в котором угол C прямой; ребро AD перпендикулярно плоскости ABC (рис. 23). Найти радиус вписанной сферы, если $AD = BC = 3$, $AC = 4$.

△ По теореме о трех перпендикулярах прямая BC перпендикулярна плоскости ACD (т. к. DA – перпендикуляр к плоскости ABC , прямая BC перпендикулярна проекции AC , следовательно, она перпендикулярна наклонной DC ; итак, $\angle BCD = 90^\circ$, $\angle BCA = 90^\circ$, следовательно прямая BC перпендикулярна плоскости ACD). Значит угол DCA – линейный угол двугранного угла при ребре BC и биссектор BCK проходит через биссектрису CK этого линейного угла. Центр вписанной сферы лежит на этом биссекторе.

Далее угол BAC – линейный угол двугранного угла при ребре AD , проводим его биссектрису AL , а затем биссектор ADL . Центр вписанной сферы лежит на этом биссекторе, следовательно, центр сферы лежит на прямой LK пересечения биссекторов BCK и ADL внутри тетраэдра.

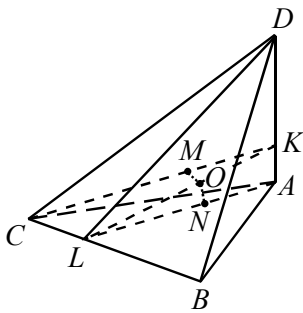


Рис. 23

Пусть O – центр сферы, точка O лежит на LK , расстояния от точки O до основания ABC и до грани ACD равны (тогда расстояния от точки O до всех граней будут равны).

Если $ON \perp ABC$, то $ON \parallel DA$, следовательно точка N лежит на AL .

Если $OM \perp ACD$, то $OM \parallel BC$, значит точка M лежит на CK . Итак, $ON = OM$.

Из условия следует, что $\triangle CAD = \triangle ACB$, поэтому равны их биссектрисы соответственных углов ACD и CAB и они отсекают на равных сторонах AD и BC равные отрезки $AK = CL$. Отсюда следует, что $\triangle KCL = \triangle LAK$. Значит, $\angle CKL = \angle KLA$. Из этого равенства и из равенства $OM = ON$ следует, что $\triangle MOK = \triangle NOL$. Поэтому и $OK = OL$,

т. е. $MO = \frac{1}{2}CL$.

Это и есть искомый радиус.

По свойству биссектрисы в треугольнике ABC биссектриса AL делит сторону BC в отношении $CL : BL = CA : BA = 4 : 5$. Отсюда

$$CL = \frac{4}{9}BC = \frac{4}{3} \text{ и } MO = \frac{2}{3}.$$

Второй способ. Пусть O – центр сферы. Рассмотрим четыре пирамиды с общей вершиной O и основаниями – гранями тетраэдра: ABC , ABD , ACD , BCD . Центр O одинаково удален от всех граней пирамиды на расстояние r , равное радиусу вписанной сферы, т. е. у всех этих пирамид одинаковая высота, равная r . Сумма объемов всех четырех пирамид составляет

$$\frac{1}{3}r(S_{ABC} + S_{ABD} + S_{ACD} + S_{BCD}) = \frac{1}{3}rS_n,$$

(S_n – площадь полной поверхности пирамиды $ABCD$) и равна объему V самой пирамиды $ABCD$, т. е.

$$V = \frac{1}{3}rS_n, \text{ откуда } r = \frac{3V}{S_n}.$$

Объем пирамиды может быть найден по формуле

$$V = \frac{1}{3}AD \cdot S_{ABC}.$$

Имеем

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BC = 6, \quad S_{ABD} = \frac{1}{2}AD \cdot AB = \frac{15}{2},$$

$$S_{ACD} = \frac{1}{2} AC \cdot AD = 6, \quad S_{BCD} = \frac{1}{2} DC \cdot BC = \frac{15}{2}.$$

Итак

$$S_n = 27, V = \frac{1}{3} AD \cdot S_{ABC} = 6, r = \frac{3V}{S_n} = \frac{2}{3}. \blacktriangle$$

Замечание. Формула $r = \frac{3V}{S_n}$ верна для любого описанного вокруг

сферы радиуса r многогранника и пригодна для определения радиуса этой сферы.

Прямая и сфера могут располагаться тремя способами.

Пусть R – радиус сферы, OK – перпендикуляр из центра сферы на прямую a .

1) Прямая a не пересекает сферу, если $OK > R$.

2) Прямая a касается сферы, если $OK = R$ (прямая проходит через конец радиуса на сфере и перпендикулярна этому радиусу).

3) Прямая пересекает сферу в двух точках, если $OK < R$.

Секущие и касательные к сфере обладают такими же свойствами, как и к окружности, в частности:

а) если две прямые пересекаются в точке S , и касаются сферы в точках K и L , то $SK = SL$ (свойство касательных);

б) если две прямые пересекаются в точке S , одна касается сферы в точке K , другая пересекает сферу в точках M и N , то $SK^2 = SM \cdot SN$ (теорема о касательной и секущей);

в) если две прямые пересекаются в точке S , одна из них пересекает сферу в точках M и N , другая – в точках P и Q , то $SM \cdot SN = SP \cdot SQ$ (точка S может располагаться снаружи (**теорема о секущих**) или внутри сферы (**теорема о пересекающихся хордах**)).

§4. Объем тетраэдра

В §1 (задача 6) и в §3 (задача 14) уже обсуждались две формулы объема тетраэдра.

1. $V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H$, где H – высота к основанию, и

2. $V = \frac{1}{3} S_n \cdot r$, где r – радиус вписанной сферы, а S_n – площадь полной поверхности тетраэдра.

Первая из них, основная формула объема, часто используется для определения расстояния между скрещивающимися прямыми (как в задаче 6 §1), расстояния между плоскостью и параллельной ей прямой или расстояния между двумя плоскостями.

Дадим краткий вывод еще двух формул объема тетраэдра:

3. $V = \frac{2}{3} S_1 \cdot S_2 \frac{\sin \alpha}{a}$, где S_1 и S_2 – площади двух граней, a – длина их общего ребра, α – величина двугранного угла между этими гранями.

4. $V = \frac{1}{6} \cdot a \cdot b \cdot \sin \varphi \cdot d$, где a и b – длины противоположных ребер тетраэдра, φ – угол между скрещивающимися прямыми, на которых лежат эти ребра, d – расстояние между этими прямыми.

□ Рассмотрим тетраэдр $ABCD$, в котором $AC = a$, площади граней ABC и ADC равны S_1 и S_2 соответственно. Пусть вершина D проектируется в точку O плоскости основания ABC и $DK \perp AC$ (рис. 24). По теореме о трех перпендикулярах $OK \perp AC$.

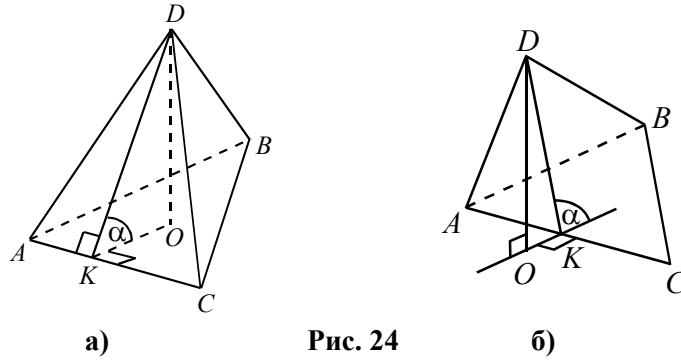


Рис. 24

Угол DKO либо равен величине α двугранного угла между гранями ADC и ABC (рис. а), либо $\angle DKO = 180^\circ - \alpha$ (рис. б). Если же точка O лежит на прямой AC , то плоскости ADC и ABC перпендикулярны друг другу, $\alpha = 90^\circ$. Во всех случаях $DO = DK \cdot \sin \alpha$.

Так как $S_2 = \frac{1}{2} AC \cdot DK$, то

$$V = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot DO = \frac{1}{3} S_1 \cdot DK \cdot \sin \alpha = \frac{1}{3} S_1 \frac{\frac{1}{2} AC \cdot DK}{\frac{1}{2} AC} \sin \alpha,$$

откуда $V = \frac{2}{3} S_1 \cdot S_2 \frac{\sin \alpha}{a}$. ■

Для доказательства формулы 4 построим тетраэдр до параллелепипеда, проводя через каждое его ребро плоскость, параллельную противоположному ребру. Три пары параллельных плоскостей образуют параллелепипед, в котором ребра исходного тетраэдра являются диагоналями граней (рис. 25).

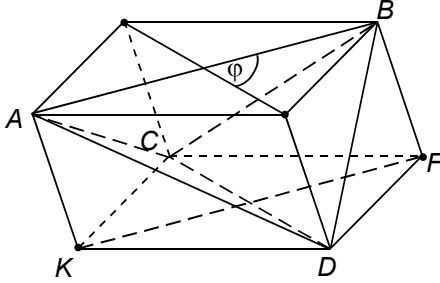


Рис. 25

□ За основание параллелепипеда примем грань с диагональю CD , его площадь обозначим S , тогда

его площадь обозначим S , тогда

объем параллелепипеда $v = S \cdot d$, где d – расстояние между плоскостью основания и плоскостью параллельной ей грани.

Объем параллелепипеда равен сумме объема тетраэдра V и объема 4^x пирамид, в каждой из которых основание составляет половину площади S параллелограмма $KCFD$ и высота совпадает с высотой параллелепипеда.

Итак, $v = V + 4 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} S \cdot d \right) = V + \frac{2}{3} v$, откуда $V = \frac{1}{3} v$.

Так как $v = S \cdot d = \left(\frac{1}{2} AB \cdot CD \cdot \sin \varphi \right) d$, то

$$V = \frac{1}{6} AB \cdot CD \cdot \sin \varphi \cdot d = \frac{1}{6} ab \sin \varphi \cdot d,$$

где $AB = a$, $CD = b$.

Формула 4 особенно удобна в случае, когда противоположные ребра тетраэдра (например, AB и CD) перпендикулярны друг другу.

Контрольные вопросы

В вопросах 1-8 рассматриваются точки $A(1, 2, -2)$, $B(3, 3, -1)$ и плоскость α , заданная уравнением $x - y + 2z - 7 = 0$.

1(2). Составить уравнение плоскости β , проходящей через точки A, B и начало координат. Найти угол между плоскостями α и β .

2(2). Найти угол между прямой AB и плоскостью α . Установить, лежат ли точки A и B по одну сторону от плоскости α , или по разные стороны.

3(2). Найти координаты точки A' – ортогональной проекции точки A на плоскость α .

4(2). Найти координаты точки A^* , симметричной точке A относительно плоскости α .

5(2). Составить уравнение плоскости γ , параллельной плоскости α и проходящей через точку B . Найти расстояние между плоскостями α и γ .

6(2). Составить уравнение сферы с центром в середине отрезка AB и касающейся плоскости α .

7(2). Составить уравнение плоскости, проходящей через точки A и B перпендикулярно плоскости α .

8(2). Составить уравнение плоскости, перпендикулярной отрезку AB , любая точка которой одинаково удалена и от точки A , и от точки B .

9(3). Известны координаты четырех вершин параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$: $A(-2, 1, 0)$, $C(0, 1, 2)$, $B_1(-3, 1, 0)$, $D_1(-3, 0, 2)$.

Каковы координаты остальных вершин?

10(3). $ABCD$ – правильный тетраэдр со стороной a , точки M и N – середины сторон AC и BD соответственно. Найти:

- а) угол между прямыми AC и BD ;
- б) угол между прямыми MN и BC ;
- в) длину отрезка MN .

11(3). Существует ли треугольная пирамида, у которой противоположные рёбра попарно равны, два из них имеют длину 3, два других – 4 и оставшиеся два – длину 5?

12(3). В треугольной пирамиде все грани имеют равные периметры. Доказать, что центр вписанной сферы совпадает с центром описанной сферы.

Задачи

I Задачи ЕГЭ

1(4). В основании прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ лежит параллелограмм $ABCD$, в котором $CD = 2$ и $\angle ADC = 30^\circ$. Высота призмы равна 4. Найти тангенс угла между плоскостью основания призмы и плоскостью $A_1 BC$ (задача В-10).

2(4). В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит правильный треугольник ABC со стороной $2\sqrt{3}$, ребро SA перпендикулярно плоскости основания и равна 4. Найти расстояние от вершины A до плоскости SBC (задача В-11).

3(7). Основание пирамиды $FABCD$ – прямоугольник $ABCD$, плоскость AFC перпендикулярна плоскости основания, тангенс угла FAC равен $\frac{81}{20}$, тангенс угла между прямой BC и плоскостью AFC равен

$\frac{4}{3}$. Точка M лежит на ребре BC , $BM = \frac{1}{3}BC$. Точка L лежит на прямой AF и равноудалена от точек M и C . Объём пирамиды $LBDM$ равен 72. Центр сферы, описанной около пирамиды $FABCD$ лежит в плоскости её основания. Найти радиус этой сферы (задача С-4).

II Задачи вступительных экзаменов

4(5). Дан прямоугольный параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, у которого $AB = 3$, $AD = 6$, $AA_1 = 2$. Найти угол между прямой AC_1 и прямой, проходящей через середины рёбер AA_1 и $B_1 C_1$ (при координатном ме-

тоде решения начало координат поместите в точку A , оси направьте по рёбрам AB, AD, AA_1 ; при векторном методе решения обозначить $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA_1} = \vec{c}$).

5(6). В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный треугольник ABC , в котором $AB = BC = \sqrt{5}$. Высота призмы равна 2. Два противоположных ребра правильного тетраэдра лежат на прямых AB_1 и BC_1 . Найти а) объем призмы, б) ребро правильного тетраэдра. (удобно использовать разложение по векторам

$$\overrightarrow{BA} = \vec{a}, \overrightarrow{BC} = \vec{b}, \overrightarrow{BB_1} = \vec{c}.$$

6(5). В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ угол между боковым ребром SA и плоскостью основания $ABCD$ равен углу между ребром SA и плоскостью грани SBC . Определить этот угол. (При координатном методе решения начало координат поместить в центр основания, оси Ox и Oy сонаправить векторам \overrightarrow{AD} и \overrightarrow{AB}).

7(6). Ребро куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равно 3. Найти радиус сферы:

- а) касающейся рёбер CB, CC_1, CD и плоскости B_1AD_1 ;
- б) касающейся рёбер CB, CC_1, CD и прямой AD_1 .

8(7). Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ объёмом 4 с основанием ABC . Известно, что в пирамиду $C_1AA_1B_1B$ можно вписать сферу. Найти:

- а) сторону основания;
- б) радиус сферы, описанной около призмы.

9(7). Основанием пирамиды служит треугольник со сторонами 5, 12, 13, а её высота образует с высотами боковых граней, опущенных из той же вершины, одинаковые углы, не меньше 30° . Какой наибольший объём может иметь такая пирамида?

10(7). В тетраэдре $ABCD$ грани ADC и ADB перпендикулярны. Точка K лежит на ребре BC , сечение ADK делит угол между гранями ADC и ADB пополам. Найти площадь сечения ADK , если $AD = 1$, $BK : KC = 1 : 5$ и объём пирамиды $ABCD$ равен 60.

11* (8). В треугольной пирамиде $ABCD$ сфера касается граней ACD и BCD в точках B_1 и A_1 , являющихся основаниями высот пирамиды, и пересекает ребро AB в точках K и L . Известно, что $AB = 4$, $KL = \frac{4}{\sqrt{5}}$, $BC = 2\sqrt{6}$, $AD = 6$. Найти:

- расстояние между рёбрами AB и CD ;
- радиус окружности, высекаемой на сфере плоскостью ABC ;
- объём пирамиды.

12* (10). Сторона основания ABC правильной треугольной пирамиды $ABCD$ равна 4, угол между боковыми рёбрами равен $\arccos \frac{7}{25}$. Точки A_1 и C_1 – середины рёбер AD и CD соответственно, CB_1 – высота в треугольнике BCD . Найти:

- угол между прямыми AC и B_1C_1 ;
- площадь треугольника $A_1B_1C_1$;
- расстояние от точки A до плоскости $A_1B_1C_1$;
- радиус вписанного в пирамиду $A_1B_1C_1D$ шара.

13(10). Основание H высоты SH треугольной пирамиды $SABC$ принадлежит грани ABC , $SH = \sqrt{\frac{5}{21}}$, $SA = 1$, $SB = 2$, $\angle ASB = 120^\circ$, $\angle ACB = 60^\circ$. Найти радиус сферы, описанной около пирамиды $SABC$.