§4. Уравнения, системы уравнений и неравенства, содержащие параметр

В задачах с параметром необходимом определить, при каких значениях параметра задача имеет решения и для всех таких значений найти все решения.

Пример 24. Решить уравнение $\sin x = \sqrt{a\cos x + 1}$.

Решение. Равенство $A = \sqrt{B}$ равносильно системе $\begin{cases} A \ge 0, \\ A^2 = B. \end{cases}$

Имеем: $\begin{cases} \sin x \ge 0, \\ \sin^2 x = a\cos x + 1. \end{cases}$

Отсюда

$$0 = a\cos x + \cos^2 x.$$

а) $\cos x = 0$. Неравенству $\sin x \ge 0$ удовлетворяют корни $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$.

б) $\cos x + a = 0$, т. е. $\cos x = -a \ne 0$ при $a \ne 0$, тогда $\sin x = \sqrt{1 - a^2}$ $(\sin x \ge 0)$, где $|a| \le 1$. Отметим, что если $\alpha = \arccos p$, то $\sin\alpha \ge 0$, так как из определения функции $f(t) = \arccos t$, $f(t) \in [0, \pi]$. Отсюда следует ответ.

Ответ. При $0 < |a| \le 1$ $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$ и $x = \arccos(-a) + 2\pi n$;

при $|a| > 1$ и $a = 0$, $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$.

Пример 25. Найти все значения параметра *a,* при которых уравнение $(1 - a)\mathrm{tg}^2 x - \dfrac{2}{\cos x} + 1 + 3a = 0$ имеет более одного решения на интервале $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Решение. Положим $t=\dfrac{1}{\cos x}$, тогда из тождества $tg^2 x+1=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ следует $(1-a)(t^2-1)-2t+1+3a=0$, т. е. $(1-a)t^2-2t+4a=0$.

При $a=1$ получаем линейное уравнение $-2t+4=0$, $t=2$, $\cos x=\dfrac{1}{2}$. Это уравнение на $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ имеет одно решение, значит, $a=1$ не удовлетворяет условию задачи. При $a\neq 1$ получаем квадратное уравнение, его корни $t_1=2$, $t_2=\dfrac{2a}{1-a}$, т. е. $\cos x=\dfrac{1}{2}$, $\cos x=\dfrac{1-a}{2a}$. На промежутке $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ функция $f(x)=\cos x$ каждое значение из интервала $(0;1)$ принимает ровно один раз, поэтому условие задачи равносильно следующему: найти все a, для которых $\dfrac{1-a}{2a}\in(0;1)$ и $\dfrac{1-a}{2a}\neq\dfrac{1}{2}$. Отсюда $a\in\left(\dfrac{1}{3};1\right)$ и $a\neq\dfrac{1}{2}$.

Ответ: $\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(\dfrac{1}{2};1\right)$.

Пример 26. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\sin x+2\sin y=0,\\ \cos x+2\cos y=a.\end{cases}$$

Решение. Преобразуем уравнения системы и рассмотрим сумму их квадратов

$$\begin{cases}\sin x=-2\sin y,\\ \cos x=a-2\cos y,\end{cases}\Rightarrow 1=a^2-4a\cos y+4.$$

При $a=0$ полученное равенство невозможно. При $a\neq 0$ $\cos y=\dfrac{a^2+3}{4a}$. Таким образом, $\left|\dfrac{a^2+3}{4a}\right|\leq 1$, $\dfrac{|a|^2+3}{4|a|}\leq 1$, $|a|^2-4|a|+3\leq 0$, $1\leq|a|\leq 3$. Теперь из второго уравнения системы $\cos x=a-2\dfrac{a^2+3}{4a}=\dfrac{a^2-3}{2a}$. Значит, необходимо $\left|\dfrac{a^2-3}{2a}\right|\leq 1$. Если

$|a| \geq \sqrt{3}$, то $|a|^2 - 3 \leq 2|a|$, $-1 \leq |a| \leq 3$, и мы получаем $\sqrt{3} \leq |a| \leq 3$. Если $|a| < \sqrt{3}$, то $3 - |a|^2 \leq 2|a|$, $|a| \geq 1$, т. е. $1 \leq |a| < \sqrt{3}$. Таким образом, для всех a, таких, что $1 \leq |a| \leq 3$, выполняются неравенства $|\cos y| \leq 1$ и $|\cos x| \leq 1$ т. е. существуют решения системы. Из первого уравнения системы получаем, что $\sin x$ и $\sin y$ должны иметь противоположные знаки.

Ответ. При $|a| < 1$ и $|a| > 3$ система решений не имеет;

при $1 \leq |a| \leq 3$ $y = \pm\arccos\dfrac{a^2+3}{4a} + 2\pi n,$

$$x = \mp\arccos\frac{a^2-3}{2a} + 2\pi m.$$

Пример 27. Найти все значения параметра a, при которых неравенство $\left|3\sin^2 x + a\sin 2x + \cos^2 x + a\right| \leq 3$ верно при всех $x \in R$.

Решение. Преобразуем неравенство:

$$\left|3\frac{1-\cos 2x}{2} + a\sin 2x + \frac{1+\cos 2x}{2} + a\right| \leq 3,$$

$$|a\sin 2x - \cos 2x + a + 2| \leq 3,$$

т. е. $-3 \leq a\sin 2x - \cos 2x + a + 2 \leq 3$,
$-5 - a < a\sin 2x - \cos 2x \leq 1 - a.$

Так как $a\sin 2x - \cos 2x = \sqrt{a^2+1}\sin(2x - \varphi)$, то наибольшее значение функции $f(x) = a\sin 2x - \cos 2x$ равно $\sqrt{a^2+1}$, наименьшее равно $-\sqrt{a^2+1}$, поэтому неравенства $-5 - a \leq f(x) \leq 1 - a$ справедливы при всех значениях x тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} -a - 5 \leq -\sqrt{a^2+1}, \\ \sqrt{a^2+1} \leq 1 - a. \end{cases}$$

Из первого неравенства находим $a \geq -\dfrac{12}{5}$, из второго $a \leq 0$.

Ответ: $\left[-\dfrac{12}{5};0\right]$.