§5. Производная. Касательная к графику функции

Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки x_0, а $x-$ произвольная точка этой окрестности. Если отношение $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ имеет предел в точке x_0, то этот предел называется *производной* функции f в точке x_0 и обозначается $f'(x_0)$:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

(здесь $\Delta x = x - x_0$).

Функция, имеющая производную в точке x_0, называется *дифференцируемой* в точке x_0. Элементарные функции дифференцируемы в каждой точке, в окрестности которой эти функции определены. При этом $\left(x^k\right)' = kx^{k-1}$ при $x>0$ (если k - целое число, то формула сохраняется при $x \neq 0$; если k - натуральное число, то формула сохраняется при всех x);

$(\sin x)' = \cos x$; $(\cos x)' = -\sin x$; $(\mathrm{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$; $(\mathrm{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

Имеют место следующие формулы для вычисления производных суммы, произведения и частного двух функций:

$$(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x);$$

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x);$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}.$$

Эти формулы справедливы в некоторой точке x, если функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в точке x; в формуле производной частного нужно требовать, чтобы $g(x)\neq 0$.

Производная постоянной функции равна 0, поэтому

$$(Cf(x))' = C'f(x) + Cf'(x) = Cf'(x),$$

т. е. постоянный множитель можно выносить за знак производной.

Очень важна формула производной сложной функции. Если функция f дифференцируема в точке x, а функция g - в точке $y = f(x)$, то сложная функция $g[f(x)]$ дифференцируема в точке x, причем

$$\{g[f(x)]\}' = g'[f(x)]f'(x).$$

При помощи этой формулы можно вычислять производные от сложных нагромождений элементарных функций, например,

$$\left(\sqrt[3]{\cos(1-x^3+\sin^2 x)}\right)' =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\cos(1-x^3+\sin^2 x)\right)^{-2/3} \cdot \left(\cos(1-x^3+\sin^2 x)\right)' =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\cos(1-x^3+\sin^2 x)\right)^{-2/3} \cdot \left(-\sin(1-x^3+\sin^2 x)\right) \times$$

$$\times \left(1-x^3+\sin^2 x\right)' = -\frac{1}{3}\cos\left(1-x^3+\sin^2 x\right)^{-2/3} \times$$

$$\times \sin\left(1-x^3+\sin^2 x\right) \cdot \left(-3x^2+2\sin x \cdot \cos x\right).$$

Функция, дифференцируемая в точке, обязана быть непрерывной в этой точке. Обратное утверждение неверно. Так, функция $y = |x|$ (график изображен на рис. 9) непрерывна в точке $x_0 = 0$, но не является дифференцируемой в ней. В самом деле, $\lim\limits_{x\to 0+0} \frac{|x|-0}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0+0} \frac{x}{x} = 1;$ $\lim\limits_{x\to 0-0} \frac{|x|-0}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0-0} \frac{-x}{x} = -1,$ и $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ не существует.

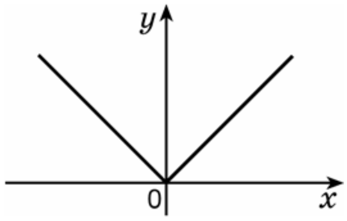

Рис. 9

Геометрически такая ситуация соответствует наличию у графика $y=|x|$ в точке $(0;\,0)$ характерного излома. Графики дифференцируемых функций не могут иметь таких изломов – они имеют касательные.

Касательной к графику дифференцируемой функции $f(x)$ в точке $A_0(x_0;\,f(x_0))$ называется прямая, проходящая через точку A_0, угловой коэффициент которой равен $f'(x_0)$. Уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке A_0 имеет вид

$$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).$$

Пример 1. Провести касательную к графику функции $y=\sqrt[3]{x^2-1}$ в точке с абсциссой $x_0=3$.

Решение. $f(x_0)=2;\ f'(x)=\frac{1}{3}\left(x^2-1\right)^{-2/3}\cdot 2x;\ f'(x_0)=\frac{1}{2}.$ Уравнение касательной $y=2+\frac{1}{2}(x-3)$, т. е. $y=\frac{x+1}{2}$.

Часто требуется провести касательную к графику функции через произвольную точку плоскости $(x_0;\,y_0)$. Такая задача может иметь два и более решений, а может вообще не иметь решений.

Пример 2. Провести касательную к параболе $y=x^2-4x+1$ через точку $(x_0;\,y_0)$. Исследовать решение.

Решение. Пусть искомая касательная касается параболы в точке $(\alpha;\,\alpha^2-4\alpha+1)$. Тогда, так как $\left(x^2-4x+1\right)'=2x-4$, то уравнение касательной имеет вид

$$y=\left(\alpha^2-4\alpha+1\right)+(2\alpha-4)(x-\alpha). \qquad (3)$$

Касательная должна проходить через точку $(x_0;\,y_0)$, откуда

$$y_0=\left(\alpha^2-4\alpha+1\right)+(2\alpha-4)(x_0-\alpha).$$

После преобразований получим квадратное уравнение для нахождения абсциссы точки касания α:

$$\alpha^2 - 2x_0\alpha + \left(y_0 + 4x_0 - 1\right) = 0. \qquad (4)$$

Если $D = x_0^2 - \left(y_0 + 4x_0 - 1\right) < 0,$ т. е. $y_0 > x_0^2 - 4x_0 + 1,$ то уравнение (4) не имеет решений. Если $D > 0,$ т. е. $y_0 < x_0^2 - 4x_0 + 1,$ то уравнение (4) имеет два решения: $\alpha = x_0 \pm \sqrt{x_0^2 - 4x_0 + 1 - y_0}$. Подставляя найденные α в (3), получим уравнения двух касательных, проходящих через точку $(x_0; y_0)$. Например, при $x_0 = 1, y_0 = -3$ имеем $\alpha = 2$ и $\alpha = 0,$ откуда из (3) получим уравнения двух касательных: $y = -3$ (горизонтальная касательная, касающаяся параболы в ее вершине) и $y = 1 - 4x$ (см. рис. 10). Наконец, если $D = 0,$ т. е. $y_0 = x_0^2 - 4x_0 + 1,$ то уравнение имеет одно решение $\alpha = x_0$. Геометрический смысл этого исследования очень прост. Если $y_0 > x_0^2 - 4x_0 + 1,$ т. е. точка $(x_0; y_0)$ лежит «выше» параболы, то через эту точку каса-

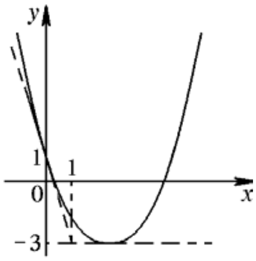

Рис. 10

тельную провести нельзя. Если $y_0 < x_0^2 - 4x_0 + 1,$ т. е. точка $(x_0; y_0)$ лежит «ниже» параболы, то через эту точку можно провести две касательные к параболе. Наконец, если $y_0 = x_0^2 - 4x_0 + 1,$ т. е. точка $(x_0; y_0)$ лежит на параболе, то через нее можно провести единственную касательную к параболе, касающуюся параболы в самой точке $(x_0; y_0)$.

