§3. Понятие о пределе функции

Одним из стандартных определений предела функции, принятых в математическом анализе, является следующее (так называемое определение по Гейне).

Число b называется *пределом функции* $f(x)$ в точке a, если для любой последовательности x_n такой, что $x_n \neq a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, выполняется равенство $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b$.

Это определение символически выражается записью $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ (или $f(x) \to b$ при $x \to a$). В определении предела рассматриваются значения x_n, не равные a, поэтому в самой точке a функция $f(x)$ может не быть определена; если значение $f(a)$ определено, то оно не обязано совпадать с b.

Пример 1. Доказать, что $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1} = 2.$

Доказательство. Функция $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ не определена при $x = 1$, но при $x_n \neq 1$ имеет место равенство $f(x_n) = x_n + 1$. Значит, если $x_n \neq 1$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 2$.

По определению предела функции, $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$.

Число b называется пределом функции $f(x)$ в точке a справа (обозначается $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = b$), если для любой последовательности x_n такой, что $x_n > a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, выполняется равенство $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b$.

Число b называется пределом функции $f(x)$ в точке a слева (обозначается $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = b$), если для любой последовательности x_n такой, что $x_n < a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, выполняется равенство $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b$.

Пример 2. Найти пределы функции

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, \text{ если } x > 0; \\ 0, \text{ если } x = 0; \\ -1; \text{ если } x < 0 \end{cases}$$ справа и слева в точке 0.

Решение. Для любой последовательности x_n такой, что $x_n > 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, выполняется равенство $\operatorname{sign} x_n = 1$, поэтому $\lim\limits_{x\to 0+0} x = 1$. Для любой последовательности x_n такой, что $x_n < 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, выполняется равенство $\operatorname{sign} x_n = -1$, поэтому $\lim\limits_{x\to 0-0} x = -1$.

Замечание. Напомним, что функция $y = \operatorname{sign} x$ была определена в задании №3. График этой функции изображен на рис. 2. Можно доказать, что $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sign} x$ не существует. В самом деле, если бы этот предел существовал и равнялся b, то для любой последовательности x_n такой, что $x_n \neq 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, выполнялось бы равенство $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{sign} x_n = b$. Но при $x_n = \frac{1}{n}$ имеем $\operatorname{sign} x_n = 1$, значит, $b = 1$. Далее, при $x_n = -\frac{1}{n}$ имеем $\operatorname{sign} x_n = -1$, значит, $b = -1$. Полученное противоречие показывает, что $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sign} x$ не существует. При рассмотрении

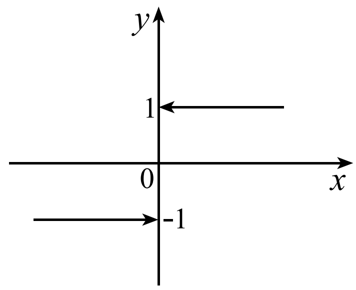

Рис. 2

многих вопросов (например, при построении графиков) возникает понятие предела функции при $x \to \infty$ (применяется запись $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$). Говорят, что $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b,$ если для любой последовательности x_n такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty,$ выполняется равенство $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b.$

Аналогично определяются записи $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$ и $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b.$ Можно определить также понятие бесконечно большого предела функции. Например, говорят, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty,$ если для любой последовательности x_n такой, что $x_n \neq a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a,$ выполняется равенство $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = +\infty.$ Говорят, что $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty,$ если для любой последовательности x_n такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty,$ выполняется равенство $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \infty.$

Аналогично можно определить, что значит $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty,$ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty,$ $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = +\infty,$ $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \infty$ и т. д.

Можно доказать, что $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{sign} x = 1,$ $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{sign} x = -1,$ $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{sign} x$ не существует.

Можно доказать следующие равенства:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\alpha} = \infty, \text{ если } \alpha = 1, 2, 3, \ldots; \ \lim_{x\to 0+0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\alpha} = +\infty, \text{ если } \alpha > 0;$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^{\alpha} = 0, \text{ если } \alpha = 1, 2, 3, \ldots; \ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^{\alpha} = 0, \text{ если } \alpha > 0;$$

$$\lim_{x\to 0} x^{\alpha} = 0, \text{ если } \alpha = 1, 2, 3, \ldots; \ \lim_{x\to 0+0} x^{\alpha} = 0, \text{ если } \alpha > 0;$$

$$\lim_{x\to\infty} x^{\alpha} = \infty, \text{ если } \alpha = 1, 2, 3, \ldots; \ \lim_{x\to+\infty} x^{\alpha} = +\infty, \text{ если } \alpha > 0.$$

На рис. 3 изображен график функции $y=\frac{1}{x}$. Для этой функции $\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{1}{x}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 0-0}\frac{1}{x}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$. Если функция $f(x)$ определена в точке a и $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$, то функция $f(x)$ называется *непрерывной* в точке a. Иными словами, функция $f(x)$ называется непрерывной в точке a, если для любой последовательности x_n такой, что $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, выполняется равенство $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=f(a)$. Оговорка $x_n\neq a$ здесь не нужна, так как при $x_n=a$ соответствующие значения $f(x_n)$ равны $f(a)$.

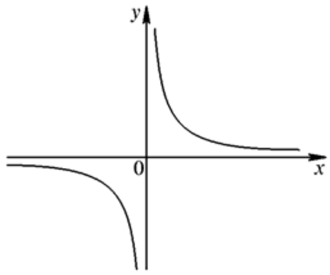

Рис. 3

Функция $y=|\mathrm{sign}x|=\begin{cases}1, \text{ если } x\neq 0;\\ 0, \text{ если } x=0,\end{cases}$ график которой изображен на рис. 4, не является непрерывной в точке 0. В самом деле, $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$, а $f(0)=0$.

Функция $f(x)$ называется *непрерывной на интервале* (конечном или бесконечном), если она непрерывна в каждой точке этого интервала. Элементарные функции, изучаемые в школьном курсе, непрерывны на любом интервале, на котором они определены. Например, функция x^3 непрерывна на $(-\infty;+\infty)$; функция $\sqrt{x}$ непрерывна на $(0;+\infty)$; функция $\mathrm{ctg}x$ непрерывна на $(0;\pi)$.

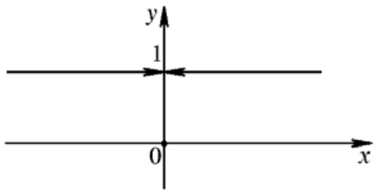

Рис. 4

На языке последовательностей непрерывность элементарных функций может быть сформулирована так. Для функции $y=x^k$, $k\in\mathbb{R}$: если $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a>0$, то $\lim\limits_{n\to\infty}x_n^k=a^k$. Для функции $y=\sin x$: если $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n=\sin a$ и т. д.

Для вычисления пределов функций часто бывает полезна следующая теорема. Пусть существует $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x)$. Тогда существуют

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right)=\lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a} g(x);$$

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)g(x)\right)=\lim_{x\to a} f(x)\lim_{x\to a} g(x);$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$$

(в последнем случае нужно требовать, чтобы $g(x)\neq 0$ при $x\neq a$ и чтобы $\lim\limits_{x\to a} g(x)\neq 0$).

Отсюда следует, что любой многочлен $P(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$ непрерывен в любой точке, а любая рациональная функция (отношение двух многочленов) непрерывна в любой точке, где знаменатель не обращается в ноль.

Пример 3. $\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2-3x+2\right)=2^2-3\cdot 2+2=0.$

Пример 4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x^3-8x+1}{3x-5}=\dfrac{5\cdot 1^3-8\cdot 1+1}{3\cdot 1-5}=1.$

Пример 5. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\left(x+1\right)=1+1=2.$

В примерах 3 и 4 мы воспользовались непрерывностью данных функций в заданных точках. В примере 5 непосредственной подстановкой $x=1$ предел вычислить не удается, т. к. и числитель, и знаменатель дроби в точке $x=1$ обращаются в ноль. Как говорят, имеет место неопределенность 0 : 0. Для раскрытия этой неопределенности мы заметим, что $\dfrac{x^2-1}{x-1}=x+1$ при $x\neq 1$, поэтому при исследовании предела при $x\to 1$ функцию $\dfrac{x^2-1}{x-1}$ можно заменить на функцию $x+1$, которая непрерывна в точке $x=1$ (см. также пример 1).

Пример 6. $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{\sqrt{x-2}-2}{x-6}=\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{\left(\sqrt{x-2}-2\right)\left(\sqrt{x-2}+2\right)}{(x-6)\left(\sqrt{x-2}+2\right)}=$

$$= \lim_{x\to 6}\frac{x-6}{(x-6)\left(\sqrt{x-2}+2\right)} = \lim_{x\to 6}\frac{1}{\sqrt{x-2}+2} = \frac{1}{\sqrt{6-2}+2} = \frac{1}{4}.$$

В последнем примере непосредственной подстановкой $x=6$ предел вычислить не удается (неопределенность 0 : 0). Приходится прибегнуть к искусственному приему – умножению числителя и знаменателя дроби на «сопряженное выражение» $\sqrt{x-2}+2.$ В итоге оказывается, что при $x \neq 6$ данная дробь равна $\dfrac{1}{\sqrt{x-2}+2},$ а последняя функция уже непрерывна в точке $x=6.$

Соображения, связанные с непрерывностью функций, часто применяются при вычислении пределов последовательностей.

Пример 7.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)} =$$

$$= \frac{2\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1-\frac{1}{n}}} = \frac{2\cdot 0}{\sqrt{1}+\sqrt{1}} = 0,$$

так как, в силу непрерывности функции $\sqrt{x}$,

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}} = \sqrt{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \sqrt{1};\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt{1-\frac{1}{n}} = \sqrt{\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)} = \sqrt{1}.$$

Пример 8.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n-3}{3n+\sqrt[3]{8n^3-1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{3}{n}}{3+\sqrt[3]{8-\frac{1}{n^3}}} = \frac{2-3\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{3+\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{8-\frac{1}{n^3}}} = \frac{2-3\cdot 0}{3+\sqrt[3]{8}} = \frac{2}{5},$$

так как, в силу непрерывности функции $\sqrt[3]{x}$,

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{8-\frac{1}{n^3}}=\sqrt[3]{\lim_{n\to\infty}\left(8-\frac{1}{n^3}\right)}=\sqrt[3]{8}.$$

Теорема о пределах суммы, произведения и частного двух функций остается справедливой, если в ней всюду заменить $x\to a$ на $x\to a+0$, $x\to a-0$, $x\to\infty$, $x\to+\infty$, $x\to-\infty$.

Можно доказать, что если $f(x)\neq 0$ в некоторой окрестности точки *a* (кроме, быть может, самой точки *a*) и $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, то $\lim\limits_{x\to a}\frac{1}{f(x)}=\infty$. Обратно, если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, то $\lim\limits_{x\to a}\frac{1}{f(x)}=0$. Утверждения эти сохраняются, если заменить *a* на $a+0$, $a-0$, ∞, $+\infty$, $-\infty$.

Пример 9. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-2x^2}{2x^3+x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-\frac{2}{x}}{2+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}=\frac{1-2\cdot 0}{2+0+0}=\frac{1}{2}.$

Пример 10. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4-x^2+x}{x^3+3}$.

Решение. Рассмотрим предел обратной величины:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+3}{x^4-x^2+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{3}{x^4}}{1-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}=\frac{0+3\cdot 0}{1-0+0}=0,$$

поэтому искомый предел равен ∞.

