

§3. Свойства арифметического квадратного корня

В школьном учебнике у вас доказываются две теоремы.

Теорема 1. Если $a \geq 0$ и $b \geq 0$, то $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$.

Теорема 2. Если $a \geq 0$ и $b > 0$, то $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Пример 1. Найдите значение выражения (без микрокалькулятора):

а) $\sqrt{5 \cdot 35 \cdot 175}$; б) $\sqrt{5 \frac{11}{49}}$; в) $\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{192}}$;

г) $\sqrt{\frac{149^2 - 76^2}{457^2 - 384^2}}$; д) $\sqrt{16^3 \cdot 4^4}$.

△ а) $\sqrt{5 \cdot 35 \cdot 175} = \sqrt{175 \cdot 175} = 175$.

б) $\sqrt{5 \frac{11}{49}} = \sqrt{\frac{256}{49}} = \frac{16}{7}$.

в) $\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{192}} = \sqrt{\frac{75}{192}} = \sqrt{\frac{25}{64}} = \frac{5}{8}$.

$$\begin{aligned} \text{г) } \sqrt{\frac{149^2 - 76^2}{457^2 - 384^2}} &= \sqrt{\frac{(149 - 76)(149 + 76)}{(457 - 384)(457 + 384)}} = \sqrt{\frac{73 \cdot 225}{73 \cdot 841}} = \\ &= \sqrt{\frac{225}{841}} = \frac{\sqrt{225}}{\sqrt{841}} = \frac{15}{29}. \end{aligned}$$

$$\text{д) } \sqrt{16^3 \cdot 4^4} = \sqrt{(4^2)^3 \cdot 4^4} = \sqrt{4^6 \cdot 4^4} = \sqrt{4^{10}} = \sqrt{(4^5)^2} = 4^5.$$

Можно решать и другим способом.

$$\begin{aligned} \sqrt{16^3 \cdot 4^4} &= \sqrt{16^2 \cdot 16 \cdot 4^4} = \sqrt{16^2} \cdot \sqrt{16} \cdot \sqrt{(4^2)^2} = 16 \cdot 4 \cdot 4^2 = \\ &= 4^2 \cdot 4 \cdot 4^2 = 4^5. \blacktriangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Рассмотрим } \sqrt{48}. \text{ Преобразуем это выражение: } \sqrt{48} &= \sqrt{16 \cdot 3} = \\ &= \sqrt{16} \cdot \sqrt{3} = 4\sqrt{3}. \end{aligned}$$

В этом случае мы говорим, что множитель 4 вынесли из под знака корня.

Теперь рассмотрим выражение $5\sqrt{7}$, преобразуем его:

$$5\sqrt{7} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{7} = \sqrt{25 \cdot 7} = \sqrt{175}.$$

В этом случае говорим, что множитель 5 внесли под знак корня.

Пример 2. Вынесите множитель из под знака корня:

$$\text{а) } \sqrt{(5\sqrt{13} - 4\sqrt{19})^2}; \quad \text{б) } \sqrt{(\sqrt{17} - \sqrt{11})^3 (\sqrt{3} - \sqrt{5})^5};$$

$$\text{в) } -\sqrt{-a^4 b^{11}}; \quad \text{г) } \sqrt{21(xy)^2}, \text{ если } xy \leq 0.$$

$$\Delta \text{ Так как } \sqrt{a^2} = |a|, \text{ то } \sqrt{(5\sqrt{13} - 4\sqrt{19})^2} = |5\sqrt{13} - 4\sqrt{19}|.$$

Определим знак числа $5\sqrt{13} - 4\sqrt{19}$. Числа $5\sqrt{13}$ и $4\sqrt{19}$ – положительные. Рассмотрим их квадраты: $(5\sqrt{13})^2 = 25 \cdot 13 = 325$ и $(4\sqrt{19})^2 = 16 \cdot 19 = 304$. Так как $304 < 325$, то $\sqrt{304} < \sqrt{325}$, т. е. $5\sqrt{13} > 4\sqrt{19}$, поэтому $|5\sqrt{13} - 4\sqrt{19}| = 5\sqrt{13} - 4\sqrt{19}$.

$$\begin{aligned} \text{б) } \sqrt{(\sqrt{7} - \sqrt{11})^3 (\sqrt{3} - \sqrt{5})^5} &= \\ &= \sqrt{(\sqrt{7} - \sqrt{11})^2 (\sqrt{7} - \sqrt{11}) (\sqrt{3} - \sqrt{5})^4 (\sqrt{3} - \sqrt{5})} = \\ &= |\sqrt{7} - \sqrt{11}| (\sqrt{3} - \sqrt{5})^2 \sqrt{(\sqrt{7} - \sqrt{11}) (\sqrt{3} - \sqrt{5})}. \end{aligned}$$

Число $\sqrt{7} < \sqrt{11}$, т. к. $(\sqrt{7})^2 = 7$, $(\sqrt{11})^2 = 11$ и $7 < 11$. Поэтому

$$\sqrt{7} - \sqrt{11} < 0, \text{ т. е. } |\sqrt{7} - \sqrt{11}| = \sqrt{11} - \sqrt{7}.$$

Окончательно получаем: $(\sqrt{11} - \sqrt{7})(\sqrt{3} - \sqrt{5})^2 \sqrt{(\sqrt{7} - \sqrt{11})(\sqrt{3} - \sqrt{5})}$.

в) Так как $a^4 \geq 0$, то корень определен, если $-b^{11} \geq 0$, т. е. $b^{11} \leq 0, b \leq 0$.

$$-\sqrt{a^4(-b^5)^2(-b)} = -a^2(-b^5)\sqrt{-b} = a^2b^5\sqrt{-b}.$$

$$\text{г) } \sqrt{21(xy)^2} = |xy|\sqrt{21} = -xy\sqrt{21}. \blacktriangle$$

Пример 3. Внесите множитель под знак корня:

$$\text{а) } (5 - \sqrt{37})\sqrt{\sqrt{2} + 3}; \text{ б) } (2a - 1)\sqrt{1 - 2a}; \text{ в) } -3xy\sqrt{-\frac{1}{(xy)^3}}.$$

Δ При решении этих примеров используем формулу $\sqrt{a^2} = |a|$.

а) Число $5 - \sqrt{37} < 0$, т. к. $5^2 = 25$, $(\sqrt{37})^2 = 37$ и $25 < 37$.

Поэтому $(5 - \sqrt{37})\sqrt{\sqrt{2} + 3} = -(\sqrt{37} - 5)\sqrt{\sqrt{2} + 3} = -\sqrt{(\sqrt{37} - 5)^2(\sqrt{2} + 3)}$.

б) Корень $\sqrt{1 - 2a}$ определен, если $1 - 2a \geq 0, 2a \leq 1, a \leq \frac{1}{2}$. При

таких a выражение $2a - 1 < 0$. Поэтому

$$(2a - 1)\sqrt{1 - 2a} = -(1 - 2a)\sqrt{1 - 2a} = -\sqrt{(1 - 2a)^2(1 - 2a)} = -\sqrt{(1 - 2a)^3}.$$

в) Корень $\sqrt{-\frac{1}{(xy)^3}}$ определен, если $xy < 0$. Поэтому

$$-3xy\sqrt{-\frac{1}{(xy)^3}} = 3(-xy)\sqrt{-\frac{1}{(xy)^3}} = \sqrt{9(-xy)^2\left(-\frac{1}{(xy)^3}\right)} = \sqrt{\frac{-9}{xy}}.$$

Пример 4. Сравните числа a и b :

$$\text{а) } a = \sqrt{3} + \sqrt{11} \text{ и } b = \sqrt{6} + \sqrt{8};$$

$$\text{б) } a = 2 - \sqrt{3} \text{ и } b = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}};$$

$$\text{в) } a = \frac{2}{5 + 3\sqrt{3}} - \frac{2}{5 - 3\sqrt{3}} \text{ и } b = \sqrt{110}.$$

Δ а) Числа a и b положительные. Рассмотрим квадраты этих чисел. Имеем: $a^2 = 3 + 2\sqrt{3}\sqrt{11} + 11 = 14 + 2\sqrt{33}$, $b^2 = 6 + 2\sqrt{6}\sqrt{8} + 8 = 14 + 2\sqrt{48}$. Так как $48 > 33$, то $\sqrt{48} > \sqrt{33}$, $2\sqrt{48} > 2\sqrt{33}$, поэтому $b^2 > a^2$ и $b > a$.

б) Число $a > 0$, т. к. $2^2 > (\sqrt{3})^2 = 3$. Число $7 - 4\sqrt{3} > 0$, т. к. $7^2 > (4\sqrt{3})^2 = 48$. Число b определено и оно больше нуля.

Следовательно, оба числа a и b положительные. Рассмотрим их квадраты. $a^2 = (2 - \sqrt{3})^2 = 4 - 4\sqrt{3} + 3 = 7 - 4\sqrt{3}$, $b^2 = 7 - 4\sqrt{3}$. Следовательно, $a = b$.

$$\text{в) } a = \frac{2}{5 + 3\sqrt{3}} - \frac{2}{5 - 3\sqrt{3}}.$$

Приводим дроби к общему знаменателю, получаем:

$$\frac{10 - 6\sqrt{3} - 10 - 6\sqrt{3}}{(5 + 3\sqrt{3})(5 - 3\sqrt{3})} = \frac{-12\sqrt{3}}{-2} = 6\sqrt{3} = \sqrt{108}.$$

Так как $110 > 108$, то $\sqrt{110} > \sqrt{108}$, поэтому $b > a$.

Пример 5. Освободиться от иррациональности в знаменателе дроби:

$$\text{а) } \frac{2}{3\sqrt{5} - \sqrt{7}}; \text{ б) } \frac{1 + \sqrt{2}}{3 - \sqrt{2} + \sqrt{5}}.$$

Δ Эту задачу надо понимать так: следует так преобразовать дробь, чтобы в знаменателе отсутствовали квадратные корни.

При решении этих задач полезно использовать формулу

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2.$$

а) Умножим числитель и знаменатель дроби на $3\sqrt{5} + \sqrt{7}$, получаем:

$$\frac{2(3\sqrt{5} + \sqrt{7})}{(3\sqrt{5} - \sqrt{7})(3\sqrt{5} + \sqrt{7})} = \frac{6\sqrt{5} + 2\sqrt{7}}{(3\sqrt{5})^2 - (\sqrt{7})^2} = \frac{6\sqrt{5} + 2\sqrt{7}}{45 - 49} = -\frac{3\sqrt{5} + \sqrt{7}}{2}.$$

б) Умножим числитель и знаменатель дроби на выражение $(3 - \sqrt{2}) - \sqrt{5}$, получаем: $\frac{(1 + \sqrt{2})((3 - \sqrt{2}) - \sqrt{5})}{((3 - \sqrt{2}) + \sqrt{5})((3 - \sqrt{2}) - \sqrt{5})} =$

$$= \frac{3 - \sqrt{2} - \sqrt{5} + 3\sqrt{2} - 2 - \sqrt{10}}{(9 + 2 - 6\sqrt{2}) - 5} = \frac{1 + 2\sqrt{2} - \sqrt{5} - \sqrt{10}}{6(1 - \sqrt{2})}.$$

В полученной дроби умножаем числитель и знаменатель на $1 + \sqrt{2}$,
 получаем: $\frac{(1 + \sqrt{2})(1 + 2\sqrt{2} - \sqrt{5} - \sqrt{10})}{6(1 - 2)} =$

$$= -\frac{1 + \sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 4 - \sqrt{5} - \sqrt{10} - \sqrt{10} - \sqrt{20}}{6} =$$

$$= -\frac{5 + 3\sqrt{2} - 3\sqrt{5} - 2\sqrt{10}}{6}. \blacktriangle$$