

Введение

Дорогие ребята!

Вы получили очередное задание по математике. В этом задании мы знакомим вас с важным математическим понятием – арифметическим корнем. Постарайтесь хорошо справиться с этим заданием. Оно подготовит вас к решению следующего задания, в котором мы рассмотрим квадратные уравнения.

§1. Определение арифметического квадратного корня

Рассмотрим простейшую задачу. Пусть площадь квадрата равна 25. Требуется определить сторону квадрата. Если сторона квадрата равна x , то для нахождения длин сторон квадрата получаем уравнение $x^2 = 25$. Этому уравнению удовлетворяют два числа: 5 и -5 . Эти числа называют квадратными корнями числа 25. Заметим, что один корень является положительным, а второй корень является отрицательным числом.

Арифметическим квадратным корнем из числа a называется неотрицательное число, квадрат которого равен a .

Обозначают арифметический квадратный корень так: \sqrt{a} .

Например, $\sqrt{64} = 8$; $\sqrt{1,44} = 1,2$; $\sqrt{0} = 0$.

Равенство $\sqrt{a} = b$ является верным, если выполняются два условия: 1) $b \geq 0$ и 2) $b^2 = a$.

При $a < 0$ выражение \sqrt{a} не имеет смысла, т. к. квадрат любого неотрицательного числа – число неотрицательное. Поэтому выражения $\sqrt{-49}$ и $\sqrt{-3,5}$ не имеют смысла.

Из определения арифметического корня следует, что если \sqrt{a} имеет смысл, то $(\sqrt{a})^2 = a$ и $\sqrt{a^2} = |a|$.

Докажем, что, действительно, $\sqrt{a^2} = |a|$. Если $a \geq 0$, то из определения арифметического корня следует, что $\sqrt{a^2} = |a|$.

Если же $a < 0$, то $-a > 0$ и $(-a)^2 = a^2$. Таким образом, арифметический корень $\sqrt{a^2}$ равен a , если $a \geq 0$ и равен $(-a)$, если $a < 0$, т. е. $\sqrt{a^2} = |a|$.

Пример 1. Найдите значение выражения:

а) $2\sqrt{12,25} - 0,1 \cdot \sqrt{0,25}$; б) $\sqrt{(-9)^2}$; в) $\sqrt{-16,2}$.

а) Из определения арифметического корня следует, что $\sqrt{12,25} = 3,5$, т. к. $3,5 > 0$ и $3,5^2 = 12,25$; $\sqrt{0,25} = 0,5$, т. к. $0,5 > 0$ и $0,5^2 = 0,25$. Получаем: $2 \cdot 3,5 - 0,1 \cdot 0,5 = 7 - 0,05 = 6,95$.

б) $\sqrt{(-9)^2} = 9$, т. к. $\sqrt{(-9)^2} = |-9| = 9$.

в) Данное выражение не имеет смысла, т. к. квадрат любого числа является неотрицательным числом.

Пример 2. При каких x имеет смысл выражение:

а) $\frac{3x}{\sqrt{x-1}}$; б) $\frac{2x+1}{\sqrt{x} + \sqrt{x+2}}$?

а) Выражение $\sqrt{x-1}$ определено, если $x-1 \geq 0$, т. е. при $x \geq 1$. Но так как $\sqrt{x-1}$ стоит в знаменателе, то данное выражение определено, если $x > 1$.

б) Выражение \sqrt{x} определено при $x \geq 0$, а выражение $\sqrt{x+2}$ определено при $x+2 \geq 0$, $x \geq -2$. Таким образом, при $x \geq 0$ определены оба корня. При таких x имеем: $\sqrt{x} \geq 0$ и $\sqrt{x+2} > 0$, поэтому знаменатель при $x \geq 0$ не обращается в нуль, значит, при $x \geq 0$ данное выражение имеет смысл.

Пример 3. Решите уравнение:

а) $\sqrt{x} + 2 = 0$, б) $\sqrt{x} - 3 = 0$, в) $\sqrt{5x+6} = 6$, г) $\sqrt{3x-7} = -5$.

а) Арифметический корень \sqrt{x} определен при $x \geq 0$, при этом $\sqrt{x} \geq 0$, значит, при любом $x \geq 0$ выражение $\sqrt{x} + 2 \geq 2$, поэтому данное уравнение не имеет решений.

б) $\sqrt{x} = 3$, из определения арифметического корня следует, что $(\sqrt{x})^2 = x = 9$, т. е. $x = 9$ является корнем уравнения.

в) Предположим, что данное уравнение имеет решение, тогда $(\sqrt{5x+6})^2 = 5x+6 = 6^2$. Отсюда уже видно, что $5x+6 > 0$, т. е. выражение $\sqrt{5x+6}$ определено. Решаем уравнение: $5x+6 = 36$, $5x = 30$, $x = 6$.

г) Уравнение не имеет смысла, т. к. арифметический корень из неотрицательного числа – число неотрицательное, а число $-5 < 0$.