§ 1. Определение функции. Числовые функции и их графики

Пусть X и Y - произвольные множества. Говорят, что на X задано отображение, или задана функция, если каждому элементу x множества X поставлен в соответствие **единственный** элемент y множества Y. Закон соответствия обычно обозначается какой-нибудь буквой, часто буквой f, а само соответствие обозначается $f: X \to Y$ или $y = f(x)$. При этом $x \in X$ называется независимой переменной, или аргументом функции $f(x)$. Множество X называется областью определения функции и обозначается $D(f)$. Подмножество множества Y, состоящее из образов всех элементов X, называется образом множества X, или множеством значений функции $f(x)$, и обозначается $f(X) \subset Y$, или $E(f) \subset Y$.

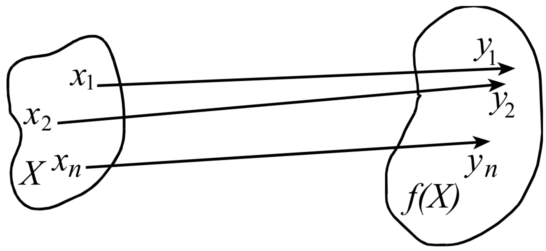


Рис. 1.

Например, на рис. 1 $f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_1, f(x_n) = y_2$. При этом различным элементам множества X может соответствовать один и тот же элемент множества $Y\ (y_1 = f(x_2) = f(x_1))$, но **одному элементу множества X должен соответствовать один элемент из множества Y.**

Пример 1. Поставим в соответствие каждому человеку планеты его группу крови. Тогда X состоит из нескольких миллиардов человек, а $f(X)$ состоит их 4-х чисел. Замечаем, что очень многим элементам множества X ставится в соответствие одно и то же число.

Пример 2. Поставим каждому человеку планеты отпечаток большого пальца его правой руки. Теперь X – то же, что и примере 1, а $f(X)$– множество “картинок”. Как известно, у разных людей разные отпечатки!

В алгебре и математическом анализе мы, в основном, изучаем **числовые** функции, где множества X, Y являются подмножествами, например, числовой оси. Тогда $f(X)$ называется **множеством значений** функции и обозначается $E(f)$.

Пример 3. (графики на рис. 2).

а) $g: R_+ \cup \{0\} \to R: y = \sqrt{x}\,(D(g) = R_+ \cup \{0\}, E(g) = R_+ \cup \{0\})$.

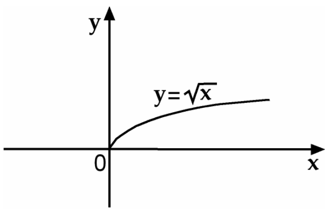
б) $f: (-\infty;0) \cup (0;+\infty) \to R: y = \dfrac{1}{x}.\ (E(f) = (-\infty;0) \cup (0;+\infty))$.

в) $f: R \to R:\ \ y = |x|$ (модуль, или абсолютная величина числа x). По определению,

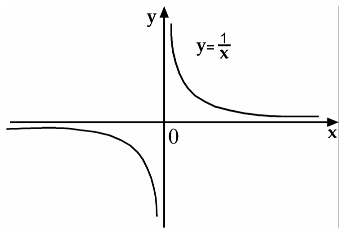
$$|x| = \begin{cases} x, если\ x \ge 0; \\ -x, если\ x < 0. \end{cases}\ (D(f) = R, E(f) = [0;+\infty) \equiv R_+ \cup \{0\}).$$

г) $y = signx \equiv \left[\begin{array}{l} 1, если\ x > 0; \\ 0, если\ x = 0; \\ -1, если\ x < 0. \end{array}\right. \Rightarrow D(y) = R, E(y) = \{-1,0,1\}.$ (читается “сигнум”, что означает “знак”).

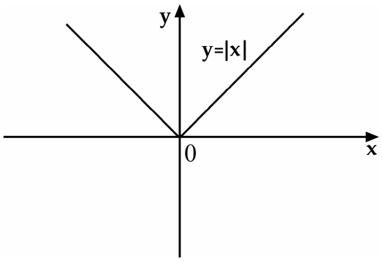
Графиком функции $y = f(x)$ на координатной плоскости (x, y) называется множество точек $(x, f(x))$.



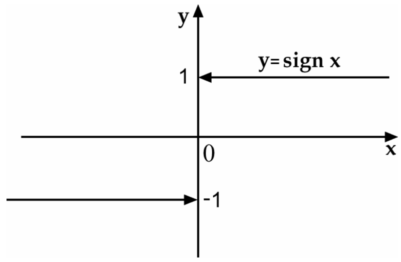
а)



б)



в)



г)

Рис. 2

Пример 4. Функция $y = [x]$ – целая часть числа x. Величина $[x]$ определяется как наибольшее целое число, не превосходящее x. Если $x \in [0;1)$, то $[x] = 0$. Если $x \in [1;2)$, то $[x] = 1$. Если $x \in [2;3)$, то $[x] = 2$ и т.д. Рассмотрим теперь отрицательные значения x. Если $x \in [-1;0)$, то $[x] = -1$. Если $x \in [-2;-1)$, то $[x] = -2$ и т.д. График функции изображен на рис.3. Ясно, что $D(f) = R; E(f) = Z$ (так обозначается множество всех целых чисел).

Если функция задана формулой $y = f(x)$ и не задана область определения, то её областью определения называется множество всех x, для которых формула имеет смысл.

Пример 5.

а) $y = x^2$ (т. к. x^2 определено для любого x, то $D(y) = R$; функция не имеет обратной).

б) $y = x^2, D(y) = [0;+\infty)$ (функция имеет обратную $x = \sqrt{y}$).

в) $y = \sin x$ ($D(y) = R$, функция не имеет обратной).

г) $y = \sin x, D(y) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ (функция имеет обратную $x = \arcsin y$).

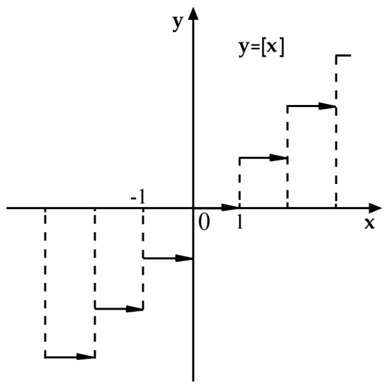
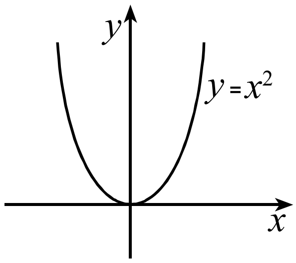
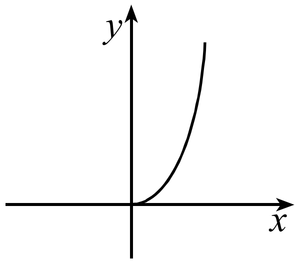


Рис. 3

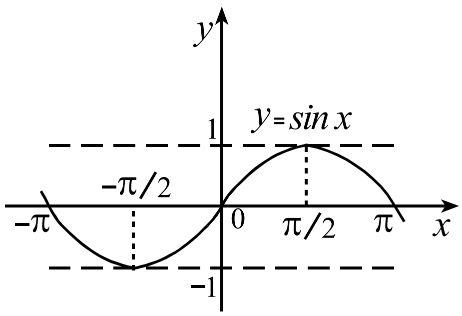
Функции пунктов а) и б) **различны**, т. к. у них разные области определения, хотя и одинаковые законы соответствия в общих областях! По этой же причине различны функции пунктов в) и г).



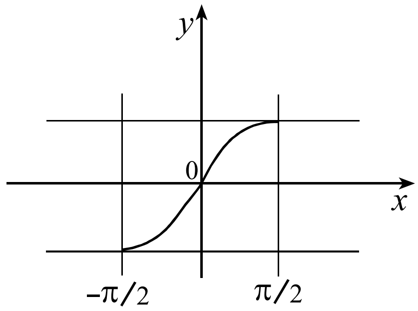
а)



б)



в)



г) $y = \sin x, x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

Рис. 4