§4. Преобразование выражений, содержащих квадратные корни

Покажем на примере, как можно тождественными преобразованиями упрощать выражения, содержащие квадратные корни. При этом мы будем пользоваться правилами, которые указали в предыдущем параграфе, как, например, правило произведения корней, правило деления корней, правило вынесения множителя из-под знака корня и т. д.

Пример 1. Упростите выражение $5\sqrt{18}+7\sqrt{50}-30\sqrt{2}$.

Δ Заметим, что $5\sqrt{18}=5\sqrt{9\cdot 2}=5\sqrt{9}\sqrt{2}=15\sqrt{2}$ и $7\sqrt{50}=$ $=7\sqrt{25\cdot 2}=7\sqrt{25}\sqrt{2}=35\sqrt{2}$.

В итоге получаем $15\sqrt{2}+35\sqrt{2}-30\sqrt{2}=20\sqrt{2}$. ▲

Пример 2. Упростите выражение:

а) $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$; б) $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$; в) $\sqrt{a+1+4\sqrt{a-3}}$.

Δ а) Заметим, что $7=4+3=2^2+\left(\sqrt{3}\right)^2$, тогда

$7+4\sqrt{3}=2^2+\left(\sqrt{3}\right)^2+2\cdot 2\cdot\sqrt{3}=\left(2+\sqrt{3}\right)^2$. Поэтому

$\sqrt{7+4\sqrt{3}}=\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)^2}=\left|2+\sqrt{3}\right|=2+\sqrt{3}$.

б) $\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{1+2-2\sqrt{2}}=\sqrt{1+\left(\sqrt{2}\right)^2-2\sqrt{2}}=\sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^2}=$

$=\left|1-\sqrt{2}\right|=\sqrt{2}-1$.

в) $\sqrt{a+1+4\sqrt{a-3}}=\sqrt{(a-3)+4+4\sqrt{a-3}}=$

$=\sqrt{\left(\sqrt{a-3}\right)^2+2^2+2\cdot 2\sqrt{a-3}}=\sqrt{\left(\sqrt{a-3}+2\right)^2}=\sqrt{a-3}+2$. ▲

Пример 3. Сократите дроби:

а) $\dfrac{a-b}{\sqrt{7a}-\sqrt{7b}}$; б) $\dfrac{64a-49b}{8\sqrt{a}-7\sqrt{b}}$; в) $\dfrac{\sqrt{3x}+\sqrt{3y}}{3x+3y+6\sqrt{xy}}$; г) $\dfrac{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$.

Δ а) Заметим, что

$a-b=\left(\sqrt{a}\right)^2-\left(\sqrt{b}\right)^2$, $\sqrt{7a}=\sqrt{7}\cdot\sqrt{a}$, $\sqrt{7b}=\sqrt{7}\cdot\sqrt{b}$,

подставляем эти выражения в данную дробь:

$$\frac{\left(\sqrt{a}\right)^2-\left(\sqrt{b}\right)^2}{\sqrt{7}\sqrt{a}-\sqrt{7}\sqrt{b}}=\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{\sqrt{7}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{7}}.$$

б) $\dfrac{64a-49b}{8\sqrt{a}-7\sqrt{b}}=\dfrac{\left(8\sqrt{a}\right)^2-\left(7\sqrt{b}\right)^2}{8\sqrt{a}-7\sqrt{b}}=\dfrac{\left(8\sqrt{a}-7\sqrt{b}\right)\left(8\sqrt{a}+7\sqrt{b}\right)}{8\sqrt{a}-7\sqrt{b}}=$

$=8\sqrt{a}+7\sqrt{b}$.

в) $\dfrac{\sqrt{3x}+\sqrt{3y}}{3x+3y+6\sqrt{xy}}=\dfrac{\sqrt{3x}+\sqrt{3y}}{\left(\sqrt{3x}\right)^2+\left(\sqrt{3y}\right)^2+2\cdot\sqrt{3x}\cdot\sqrt{3y}}=$

$=\dfrac{\sqrt{3x}+\sqrt{3y}}{\left(\sqrt{3x}+\sqrt{3y}\right)^2}=\dfrac{1}{\sqrt{3x}+\sqrt{3y}}$.

г) Преобразуем числитель дроби:

$a\sqrt{a}-b\sqrt{b}=\left(\sqrt{a}\right)^2\sqrt{a}-\left(\sqrt{b}\right)^2\sqrt{b}=\left(\sqrt{a}\right)^3-\left(\sqrt{b}\right)^3=$

$=\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\left(\sqrt{a}\right)^2+\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}+\left(\sqrt{b}\right)^2\right)=\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(a+b+\sqrt{ab}\right)$.

В результате получаем: $\dfrac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(a+b+\sqrt{ab}\right)}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=a+b+\sqrt{ab}$. ▲

Пример 4. Докажите тождество:

$$\left(\frac{\sqrt{m}}{n-\sqrt{mn}}+\frac{\sqrt{n}}{m-\sqrt{mn}}\right)\cdot\frac{\sqrt{mn}}{\sqrt{n}+\sqrt{m}}=-1.$$

Δ Преобразуем выражение, стоящее в скобках:

$$\frac{\sqrt{m}}{n-\sqrt{mn}}+\frac{\sqrt{n}}{m-\sqrt{mn}}=\frac{\sqrt{m}}{\left(\sqrt{n}\right)^2-\sqrt{m}\cdot\sqrt{n}}+\frac{\sqrt{n}}{\left(\sqrt{m}\right)^2-\sqrt{m}\cdot\sqrt{n}}=$$

$$=\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}\left(\sqrt{n}-\sqrt{m}\right)}+\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}\left(\sqrt{m}-\sqrt{n}\right)}=\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}\left(\sqrt{n}-\sqrt{m}\right)}-\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}\left(\sqrt{n}-\sqrt{m}\right)}=$$

$$=\frac{\sqrt{m}\cdot\sqrt{m}-\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{m}\cdot\left(\sqrt{n}-\sqrt{m}\right)}=\frac{\left(\sqrt{m}\right)^2-\left(\sqrt{n}\right)^2}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{m}\cdot\left(\sqrt{n}-\sqrt{m}\right)}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{m}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{m}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{m}\cdot\left(\sqrt{n}-\sqrt{m}\right)}=\frac{\sqrt{m}+\sqrt{n}}{-\sqrt{nm}}.$$ Тождество доказано. ▲

Пример 5. Решите уравнение.

$\sqrt{4x^2+16x+16}-\sqrt{x^2-6x+9}=4.$ Преобразуем левую часть уравнения:

$\sqrt{4x^2+16x+16}-\sqrt{x^2-6x+9}=\sqrt{4\left(x^2+4x+4\right)}-\sqrt{(x-3)^2}=$

$=\sqrt{4}\cdot\sqrt{(x+2)^2}-\sqrt{(x-3)^2}=2|x+2|-|x-3|.$ После тождественных преобразований получили уравнение $2|x+2|-|x-3|=4.$

1) Пусть $x\ge 3,$ тогда $|x-3|=x-3, |x+2|=x+2,$ наше уравнение сводится к уравнению

$$2(x+2)-(x-3)=4;\ 2x+4-x+3=4;\ x+3=0;\ x=-3,$$

но это число меньше 3.

2) Пусть теперь $-2<x<3,$ тогда $|x-3|=3-x, |x+2|=x+2,$ получаем уравнение: $2x+4+x-3=4, 3x=3, x=1.$ Число 1 удовлетворяет условию $-2<1<3.$

3) Пусть $x\le -2,$ тогда $|x-3|=3-x, |x+2|=-x-2,$ приходим к уравнению: $-2x-4-3+x=4, -x=11, x=-11.$ Число $-11<-2.$

Ответ: $1;-11.$ ▲

Пример 6. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases}3\sqrt{x+3}-2\sqrt{y-2}=3,\\ 2\sqrt{x+3}+\sqrt{y-2}=9.\end{cases}$$

Корень $\sqrt{x+3}$ определен при $x\ge -3,$ а корень $\sqrt{y-2}$ определен при $y\ge 2.$

Умножим второе уравнение системы на 2 и прибавим к первому уравнению, получаем: $7\sqrt{x+3}=21, \sqrt{x+3}=3, x+3=9, x=6.$

Подставляем это значение для x в первое уравнение, получаем:

$$3\cdot 3-2\sqrt{y-2}=3;\ 6=2\sqrt{y-2};\ \sqrt{y-2}=3;\ y-2=9;\ y=11.$$

Ответ: $(6;11).$ ▲