Министерство образования Российской Федерации
Московский физико-технический институт
(государственный университет)
Заочная физико-техническая школа

МАТЕМАТИКА

Задание №7 для 10-х классов

(2003-2004 учебный год)

г. Долгопрудный, 2004

Составитель: Т.В.Михайлова, доцент кафедры высшей математики МФТИ.

Математика: задание №7 для 10-х классов (2003-2004 учебный год). - М.: МФТИ, 2004, 24 с.

Дата отправления задания – 15 апреля 2004 г.

Составитель:
Михайлова Татьяна Валентиновна
Изд. лиц. №040060 от 21.08.96г. Подписано в печать 30.01.04.
Формат 60x90 1/16. Бумага типографская. Печать офсетная. Усл. печ. л 0,75
Уч. - изд. л.0,66. Тираж 2 500 экз. Заказ 13-з.

Заочная физико-техническая школа
Московский физико-технический институт
(государственный университет)
«ФИЗТЕХ-ПОЛИГРАФ»

141700, Москов.обл., г.Долгопрудный, Институтский пер., 9
ЗФТШ при МФТИ, тел./факс (095) 408-5145 - **заочное отделение**
тел./факс (095) 485-4227 - **очно - заочное отделение**
E.mail : *zftsh @ pop3.mipt.ru*

Наш сайт: www.school.mipt.ru

В элементарной математике изучаются действительные числа. Сначала в процессе счета возникает так называемый ряд натуральных чисел 1, 2, ... *n*, ... В арифметике вводятся действия сложения и умножения над натуральными числами. Что же касается операций вычитания и деления, то они уже оказываются не всегда возможными во множестве натуральных чисел.

Та же потребность измерения величин и проведения таких операций, как извлечение корня, решение алгебраических уравнений, приводит к дальнейшему расширению запаса рассматриваемых чисел: появляются иррациональные и, наконец, комплексные числа.

§ 1. Определение комплексных чисел. Операции над комплексными числами

1. Комплексные числа. Комплексными числами называют выражения вида $a+ib$, где a и b – любые действительные числа, i – некоторый символ, для которых следующим образом вводятся понятия равенства и операции сложения и умножения:

а) два комплексных числа $a+ib$ и $c+id$ *равны* тогда и только тогда, когда

$$a=c \text{ и } b=d;$$

б) *суммой* чисел $a+ib$ и $c+id$ называется число

$$a+c+i(b+d);$$

в) *произведением* чисел $a+ib$ и $c+id$ называется число

$$ac-bd+i(ad+bc).$$

Таким образом, сложение и умножение комплексных чисел производится согласно формулам:

$$(a+ib)+(c+id)=a+c+i(b+d), \tag{1}$$

$$(a+ib)(c+id)=ac-bd+i(ad+bc). \tag{2}$$

Комплексные числа принято обозначать одной буквой (чаще всего буквой z или w). Равенство $z=a+ib$ означает, что комплексное число $a+ib$ обозначено буквой z.

Действительное число a называется действительной частью комплексного числа $z=a+ib$ и обозначается Re z; пишут Re $z = a$ или Re$(a + ib) = a$. Действительное число b называется мнимой частью числа $z=a+ib$ и обозначается Im z, пишут Im $z = b$ или Im $(a + \mathrm{i}b) = b$. Символ i называется мнимой единицей.

Заметим, что операции сложения и умножения над числами $a+i0$ проводятся так же, как над действительными числами. В самом деле, на основании формул (1) и (2) имеем:

$$(a+i0)+(c+i0)=a+c+i0,$$

$$(a+i0)(c+i0)=(ac)+i0.$$

Таким образом, отождествив число $a+i0$ с действительным числом a, получим, что каждое действительное число содержится во множестве комплексных чисел, а именно $a=a+i0$. В частности, число $0=0+i0$ будем, как обычно, называть нулем, а число $1=1+i0$ – единицей. Числа 1 и 0 обладают теми же свойствами, что и в случае действительных чисел: $z\cdot 1=z;\ z+0=z;\ z\cdot 0=0.$

Числа $0+ib$ называют чисто мнимыми и обозначают

$$ib:\ 0+i7=7i,\ \ 0-i2=-2i.$$

На основании формулы (2) найдем значение выражения $i^2=ii$:

$$i^2=ii=(0+i1)(0+i1)=-1+i0=-1.$$

Таким образом,

$$i^2 = -1. \qquad (3)$$

Заметим, что формулу (2) запоминать не нужно, т.к. она получается автоматически, если перемножить двучлены $a+ib$ и $c+id$, а затем на основании формулы (3) заменить i^2 на –1.

Пример 1. Найти сумму и произведение комплексных чисел $z_1 = 8+3i$ и $z_2 = -5+2i.$ По формуле (1) находим

$$z_1 + z_2 = 8 - 5 + i(3+2) = 3+5i.$$

Формально перемножая двучлены $(8+3i)$ и $(-5+2i)$ и учитывая соотношение (3), имеем

$$z_1 z_2 = (8+3i)(-5+2i) = -40 - 15i + 16i + 6i^2 = -40 + i - 6 = -46 + i.$$

2. Свойства операций над комплексными числами. Операции сложения (1) и умножения (2) обладают следующими свойствами:

1. *Коммутативность сложения*:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1,$$

для любых комплексных чисел z_1, z_2.

2. *Ассоциативность сложения*:

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3),$$

для любых комплексных чисел z_1, z_2, z_3.

3. $z + 0 = z$ для любого комплексного числа z.

4. Для любых комплексных чисел z_1 и z_2 существует число z такое, что $z_1 + z = z_2$. Это число называется *разность* чисел z_2 и z_1 и обозначается $z_2 - z_1$.

5. *Коммутативность умножения*:

$$z_1 z_2 = z_2 z_1,$$

для любых комплексных чисел z_1, z_2.

6. *Ассоциативность умножения*:

$$(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3),$$

для любых комплексных чисел z_1, z_2, z_3.

7. *Дистрибутивный закон*

$$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3,$$

для любых комплексных чисел z_1, z_2, z_3.

8. $1 \cdot z = z$ для любого комплексного числа z.

9. Для любых двух комплексных чисел z_1 и z_2, где $z_1 \neq 0$, существует число z такое, что $z_1 z = z_2$. Это число называется *частным* комплексных чисел z_2 и z_1 и обозначается $\dfrac{z_2}{z_1}$. Деление на 0 невозможно.

Все перечисленные свойства операций следуют из определения операций сложения и умножения (см. формулы (1) и (2)) и равенства комплексных чисел. Докажем свойство 9; остальные докажите самостоятельно.

Пусть $z_1 = a+ib$, $z_2 = c+id$, $z_2 \neq 0$, т.е. хотя бы одно из чисел c или d отлично от нуля, $z = x+iy$. Тогда равенство $zz_2 = z_1$ запишется так:

$$a + ib = (x+iy)(c+id) = xc - yd + i(xd + yc).$$

Отсюда имеем, что x и y удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} cx - dy = a, \\ dx + cy = b. \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение

$$x = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \quad y = \frac{bc - ad}{c^2 + d^2},$$

то есть

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}. \qquad (4)$$

Пример 2. Найти разность $z_1 - z_2$ и частное $\frac{z_1}{z_2}$ комплексных чисел

$$z_1 = 2 - 7i \text{ и } z_2 = -1 + 3i.$$

Находим разность

$$z_1 - z_2 = (2 - 7i) - (-1 + 3i) = (2 - (-1)) + i(-7 - 3) = 3 - 10i.$$

С помощью формулы (4) находим частное:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2(-1) + (-7)3}{1 + 9} + i\frac{-7(-1) - 2 \cdot 3}{1 + 9} = \frac{-23}{10} + \frac{1}{10}i.$$

В §2 будет указан более простой способ деления комплексных чисел, не требующий запоминания формулы (4).

Заметим, что понятия «больше» и «меньше» для комплексных чисел не определяется; записи вида $z > 3 + i$ и им подобные лишены всякого смысла.

§ 2. Геометрическое изображение комплексных чисел. Модуль и аргументы комплексного числа

1. Комплексная плоскость. Рассмотрим прямоугольную систему координат на плоскости. Каждому комплексному числу $z = a + ib$ поставим в соответствие точку $M(a, b)$ координатной плоскости, т.е. точку, абсцисса которой равна Re z = a, а ордината равна Im z = b. Обратно, каждой точке плоскости с координатами (a,b) поставим в соответствие комплексное число $z = a + ib$.

Таким образом, построено взаимно однозначное соответствие между множеством комплексных чисел и точками плоскости, на которой выбрана система координат. Сама координатная плоскость называется при этом *комплексной плоскостью*. Ось абсцисс называется *действительной осью*, т.к. на ней расположены точки, соответствующие комплексным числам $a + i0$, т.е. соответствующие действительным числам. Ось ординат называется *мнимой осью* – на ней лежат точки, соответствующие мнимым комплексным числам $0 + bi$.

Не менее важной и удобной является интерпретация комплексного числа $a + bi$ как вектор $\overrightarrow{OM}$ (см. рис. 1). Очевидно, что каждому вектору плоскости с началом в точке $O(0,0)$ и концом в точке $M(a, b)$ соответствует комплексное число $a + bi$ и наоборот. Нулевому вектору соответствует комплексное число $0 + 0i$.

Взаимно однозначные соответствия, установленные между множеством комплексных чисел и множеством точек плоскости, между множеством комплексных чисел и множеством векторов плоскости позволяют называть комплексное число $z = a + bi$ точкой $a + bi$ или вектором $z = a + ib$.

2. Модуль комплексного числа. Перейдем к понятию модуля комплексного числа.

Определение. *Модулем* комплексного числа $z = a + ib$ называется длина вектора, соответствующего этому числу. Модуль обозначается $|z|$ или буквой r. Применяя теорему Пифагора, получим, что $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ (см. рис. 1).

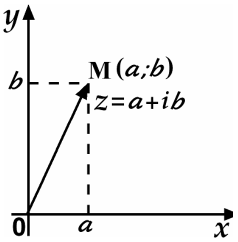

Рис. 1

Если $z = a + 0i$, то $|z| = |a + 0i| = \sqrt{a^2} = |a|$, то есть для действительного числа модуль совпадает с абсолютной величиной этого числа.

Очевидно, что $|z| > 0$ для всех $z \neq 0$; $|z| = 0$ в том и только том случае, когда $z = 0 + i0 = 0$.

Пусть $z = a + ib$. Число $a - bi$ называется *комплексно сопряженным* с числом $z = a + ib$ и обозначается $\bar{z}$; $\bar{z} = a - bi$.

Заметим, что

$$|z| = |\bar{z}| = \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = |z|^2 = |\bar{z}|^2,$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}} = \frac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2}, z_2 \neq 0.$$

Полученное соотношение сводит деление комплексных чисел z_1 и z_2 к умножению чисел z_1 и $\overline{z_2}$ и к делению их произведения на действительное положительное число $|z_2|^2$, что позволяет не запоминать довольно громоздкую формулу (4).

Пример 1. Найти частное $\dfrac{3 - 5i}{-1 + 10i}$.

Умножая числитель и знаменатель дроби на число, сопряженное знаменателю, имеем

$$\frac{3 - 5i}{-1 + 10i} = \frac{(3 - 5i)(-1 - 10i)}{(-1 + 10i)(-1 - 10i)} = \frac{-3 + 5i - 30i + 50i^2}{1 + 100} = -\frac{53}{101} - \frac{25}{101}i.$$

3. Геометрический смысл сложения, вычитания и модуля разности двух комплексных чисел.

Пусть $z_1 = a_1 + ib_1$ и $z_2 = a_2 + ib_2$. Им соответствуют векторы с координатами (a_1, b_1) и (a_2, b_2). Тогда числу $z_1 + z_2 = a_1 + a_2 + i(b_1 + b_2)$ будет соответствовать вектор с координатами $(a_1 + a_2, b_1 + b_2)$. Таким образом, чтобы найти вектор, соответствующий сумме комплексных чисел z_1 и z_2, надо сложить векторы, отвечающие комплексным числам z_1 и z_2. Аналогично, разности $z_2 - z_1$ комплексных чисел z_2 и z_1 соответ-

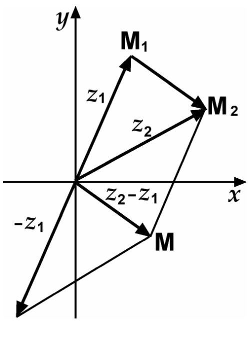

Рис. 2

ствует разность векторов, соответствующих числам z_2 и z_1.

Модуль $|z_2 - z_1|$ двух комплексных чисел z_1 и z_2 по определению модуля есть длина вектора $z_2 - z_1$. Построим этот вектор, как сумму двух векторов z_2 и $(-z_1)$ (см. рис. 2). Получим вектор $\overrightarrow{OM}$, равный вектору $\overrightarrow{M_1M_2}$. Следовательно, $|z_1 - z_2|$ есть длина вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$, то есть модуль разности двух комплексных чисел есть расстояние между точками комплексной плоскости, которые соответствуют этим числам.

С помощью полученного соотношения решим следующие задачи.

Пример 4. Найти множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условию:

а) $|z - i| = 1$, б) $1 < |z + 3 + i| < 3$,

в) $|z - 1| < |z + 1|$?

а) Условию $|z - i| = 1$ удовлетворяют те и только те точки комплексной плоскости, которые удалены от точки i на расстояние, равное 1.Такие точки лежат на окружности радиуса 1 с центром в точке i (см. рис. 3).

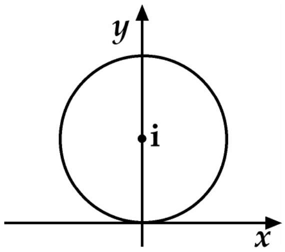

Рис. 3

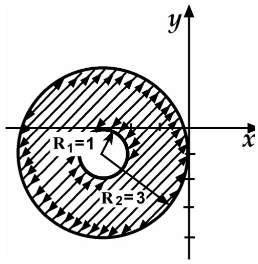

Рис. 4

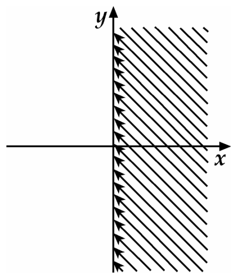

Рис. 5

б) Условию $1 < |z + 3 + i| < 3$ удовлетворяют те и только те точки комплексной плоскости, которые удалены от точки (– 3 – i) на расстояние, большее 1, но меньше 3. Такие точки расположены внутри кольца, образованного двумя концентрическими окружностями с центром в точке (– 3 – i) и радиусами $R_1 = 1, R_2 = 3$ (см. рис. 4: искомое множество заштриховано).

в) Используя геометрическую интерпретацию модуля разности двух комплексных чисел, задачу переформулируем так: найти множество точек комплексной плоскости, которые расположены ближе к точке $z = 1$, чем к точке $z = -1$. Ясно, что это все точки плоскости, лежащие правее мнимой оси, и только они (см. рис. 5: искомое множество заштриховано).

4. Аргументы комплексного числа. Аргументом комплексного числа $z = a + ib\,(z \neq 0)$ называется величина угла между положительным направлением действительной оси и вектором z; величина угла считается положительной, если отсчет угла производится против часовой стрелки, и отрицательной, если отсчет производится по часовой стрелке.

Для обозначения того факта, что число φ является аргументом числа $z = a + ib$, пишут $\varphi = \arg z$ или $\varphi = \arg(a + ib)$.

Для числа $z = 0$ аргумент не определяется. Поэтому во всех последующих рассуждениях, связанных с понятием аргумента будем считать, что $z \neq 0$.

Заметим, что заданием модуля и аргумента комплексное число определяется однозначно; число $z=0$ – единственное комплексное число, которое определяется заданием только своего модуля ($|z|=0$).

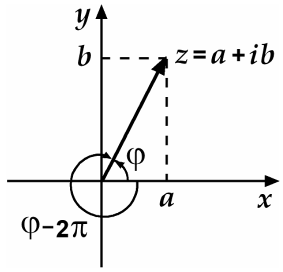

Рис. 6

С другой стороны, если задано комплексное число, то, очевидно, модуль этого числа всегда определен единственным образом в отличие от аргумента, который всегда определяется неоднозначно: если φ – некоторый

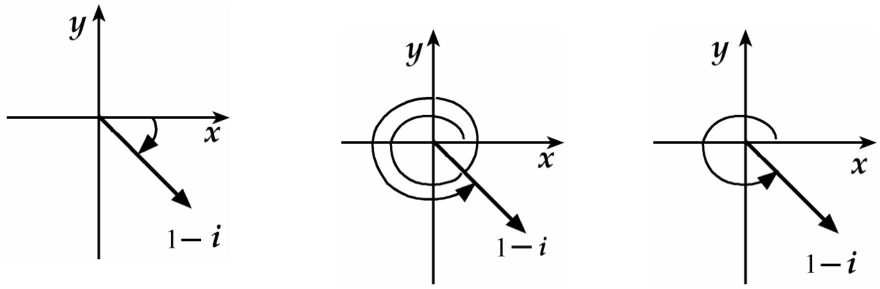

Рис. 7

аргумент числа z, то углы $\varphi+2\pi k$, $k\in Z$ тоже являются аргументами того же числа z. Например, аргументами числа $(1-i)$ являются углы $-\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{15\pi}{4}$ и т.д. (см. рис.7). Таким образом, для каждого числа z имеется бесконечное множество аргументов, любые два из которых отличаются друг от друга на число, кратное 2π.

Из определения тригонометрических функций (см. рис. 6) следует, что если $\varphi=\arg(a+ib)$, то имеет место следующая система

$$\begin{cases}\cos\varphi=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\\ \sin\varphi=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}};\end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases}\cos\varphi=\dfrac{a}{|z|},\\ \sin\varphi=\dfrac{b}{|z|}.\end{cases} \tag{5}$$

Справедливо и обратное: если выполняются равенства системы (5), то $\varphi=\arg(a+ib)$.

При решении задач на нахождение аргумента конкретного комплексного числа $z=a+ib$ полезно использовать геометрическую интерпретацию комплексного числа для определения той четверти, где находится точка $z=a+ib$, а после того, как это сделано, можно для нахождения аргумента воспользоваться одним (любым) из уравнений (5).

Пример 5. Найти аргумент числа $z=1-i$.

Так как $\operatorname{Re} z=1>0, \operatorname{Im} z=-1<0$, то точка $z=1-i$ лежит в IV четверти. Поэтому достаточно найти такое решение одного из двух уравнений (5), которое является углом в IV четверти. Получаем

$$\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{1+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \varphi=-\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ \ k\in Z.$$

Заметим, что если $\varphi=\arg(a+ib)$, $a\neq 0$, то из (5) следует, что $\operatorname{tg}\varphi=\dfrac{b}{a}$. Обратное утверждение неверно. В самом деле, число

$\varphi = \dfrac{3\pi}{4}$ является решением уравнения $\mathrm{tg}\varphi = -1,$ но не является аргументом числа $(1-i).$

Пример 6. Найти аргумент числа $z = (-1-i).$

Так как $\mathrm{Re}\, z = -1 < 0, \mathrm{Im} z = -1 < 0,$ то точка $z = -1 - i$ лежит в III четверти. Следовательно, надо найти такое решение уравнения $\mathrm{tg}\varphi = \dfrac{-1}{-1} = 1,$ которое является углом в III четверти. Получаем

$$\varphi = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathrm{Z}.$$

Заметим, что если $a = 0,$ то есть $z = bi,$ то либо $\arg z = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,$ $k \in \mathrm{Z}$ (если $b > 0$), либо $\arg z = \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi k,$ $k \in \mathrm{Z}$ (если $b < 0$).

§ 3. Различные формы записи комплексных чисел. Операции над комплексными числами

1. Алгебраическая и тригонометрическая формы комплексного числа**. Запись комплексного числа z в виде $a + bi$ называется *алгебраической формой* комплексного числа.**

Рассмотрим другие формы записи комплексных чисел. Пусть r – модуль, а φ – какой-либо из аргументов комплексного числа $z = a + ib$, то есть $r = |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\varphi = \arg(a + ib).$ Тогда из формулы (5) следует, что $a = r\cos\varphi,$ $b = r\sin\varphi,$ и, значит,

$$a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Запись комплексного числа в виде $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ называется ее *тригонометрической формой*.

Тригонометрическая форма записи комплексных чисел во многих случаях оказывается более удобной, чем алгебраическая.

Для того, чтобы перейти от алгебраической формы комплексного числа $a + bi$ к тригонометрической, достаточно найти его модуль и *один* из аргументов.

Пример 7. Записать число $z = \sqrt{3} - i$ в тригонометрической форме.

Находим модуль

$$r = |z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2.$$

Находим один из аргументов; так как $\mathrm{Re}\, z = \sqrt{3} > 0,$ $\mathrm{Im} z = -1 < 0,$ то число $\sqrt{3} - i$ лежит в IV четверти. Поэтому надо найти такое решение уравнения $\mathrm{tg}\varphi = \dfrac{-1}{\sqrt{3}},$ которое является углом в IV четверти, т.е. $\varphi = \dfrac{11\pi}{6}.$

Таким образом,

$$\sqrt{3} - i = 2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right).$$

Пример 8. Найти сумму $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5$, если

$$|z_k| = r > 0, \arg z_k = \frac{2\pi k}{5}, k = 1, 2, 3, 4, 5.$$

$$\frac{1}{r}(z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5) = \left(\cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5} + \cos\frac{6\pi}{5} + \cos\frac{8\pi}{5} + \cos\frac{10\pi}{5}\right) +$$

$$+ i\left(\sin\frac{2\pi}{5} + \sin\frac{4\pi}{5} + \sin\frac{6\pi}{5} + \sin\frac{8\pi}{5} + \sin\frac{10\pi}{5}\right) =$$

$$= \left(2\cos\frac{4\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5} + 2\cos\frac{6\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5} + 1\right) + i \cdot 0 =$$

$$= 2\cos\frac{2\pi}{5} \cdot 2\cos\frac{5\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5} + 1 = -4\cos\frac{2\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5} + 1 =$$

$$= \frac{-4\cos\frac{2\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}\sin\frac{\pi}{5}}{\sin\frac{\pi}{5}} + 1 = \frac{-2\cos\frac{2\pi}{5}\sin\frac{2\pi}{5} + \sin\frac{\pi}{5}}{\sin\frac{\pi}{5}} = \frac{-\sin\frac{4\pi}{5} + \sin\frac{\pi}{5}}{\sin\frac{\pi}{5}} = 0.$$

2. Умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме.

Пусть

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \ z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2).$$

Тогда

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 +$$
$$+ i \cdot (\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \cos\varphi_2\sin\varphi_1)) =$$
$$= r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)). \qquad (6)$$

Таким образом, *модуль произведения двух комплексных чисел равен произведению модулей сомножителей, а сумма аргументов сомножителей является аргументом произведения*.

Пусть $z_2 \neq 0$, тогда

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)r_2(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)r_2(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)} =$$

$$= \frac{r_1}{r_2}(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2) =$$

$$= \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)). \qquad (7)$$

Таким образом, *модуль частного двух комплексных чисел равен частному модулей делимого и делителя, а разность аргументов делимого и делителя является аргументом частного*.

3. Возведение в степень и извлечение корня. Формула (6) для произведения двух комплексных чисел может быть обобщена на случай n сомножителей. Используя метод математической индукции, нетрудно показать, что если $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ – аргументы чисел $z_1, z_2, ..., z_n$ соответственно, то

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \dots + \varphi_n = \arg(z_1 z_2 ... z_n),$$
$$|z_1||z_2|...|z_n| = |z_1 z_2 ... z_n|.$$

Отсюда, как частный случай, получается формула, дающая правило возведения комплексного числа $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ в целую положительную степень:

$$z^n = (r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \qquad (8)$$

Таким образом, *при возведении комплексного числа в степень с натуральным показателем его модуль возводится в степень с тем же показателем, а аргумент умножается на показатель степени.*

Формула (8) называют *первой формулой Муавра*.

Пример 9. Найти z^{11}, если $z = 1 - i$.

Так как $|1-i| = \sqrt{2}$, а одним из аргументов является $\varphi = -\dfrac{\pi}{4}$ (см. пример 5), то

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Следовательно, применяя формулу (8), получим

$$z^{11} = (\sqrt{2})^{11}\left[\cos\left(-\frac{11\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{11\pi}{4}\right)\right] = 2^{11/2}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right] =$$

$$= 2^{11/2}\left[-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right] = -\sqrt{2}^{10}(1+i) = -2^5(1+i).$$

Перейдем к операции извлечения корня данной степени из комплексного числа.

Число z называется *корнем степени n,* $n \in \mathrm{N}$ из числа ω (обозначается $\sqrt[n]{\omega}$), если $z^n = \omega$.

Таким образом, для того, чтобы извлечь корень степени *n,* $n \in \mathrm{N}$ из числа ω, достаточно решить уравнение $z^n = \omega$.

Если $\omega = 0$, то при любом *n* уравнение $z^n = 0$ имеет одно и только одно решение $z = 0$.

Пусть теперь $\omega \neq 0$. Представим z и ω в тригонометрической форме:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \qquad \omega = r_0(\cos\varphi_0 + i\sin\varphi_0).$$

Тогда уравнение $z^n = \omega$ примет вид

$$(r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r_0(\cos\varphi_0 + i\sin\varphi_0).$$

Два комплексных числа равны тогда и только тогда, когда равны их модули, а аргументы отличаются на число, кратное 2π. Следовательно,

$$r^n = r_0, \qquad n\varphi = \varphi_0 + 2\pi k, \;\; k \in \mathrm{Z}$$

или

$$r = \sqrt[n]{r_0}, \qquad \varphi = \frac{\varphi_0}{n} + \frac{2\pi}{n}k, \;\; k \in \mathrm{Z}.$$

Таким образом, все решения уравнения $z^n = \omega$ даются формулой

$$z_k = \sqrt[n]{r_0}\left(\cos\left(\frac{\varphi_0}{n} + \frac{2\pi}{n}k\right) + i\sin\left(\frac{\varphi_0}{n} + \frac{2\pi}{n}k\right)\right),$$

$$k = 0, 1, ..., (n-1). \qquad (9)$$

В самом деле, придавая числу k в формуле (9) целые значения, отличные от 0, 1, ..., (n – 1), мы не получим других комплексных чисел. Например, при $k = n$ получаем

$$z_n = \sqrt[n]{r_0}\left(\cos\left(\frac{\varphi_0}{n} + 2\pi k\right) + i\sin\left(\frac{\varphi_0}{n} + 2\pi k\right)\right) =$$

$$= \sqrt[n]{r_0}\left(\cos\frac{\varphi_0}{n} + i\sin\frac{\varphi_0}{n}\right) = \omega.$$

Формула (9) называется *второй формулой Муавра.*

Таким образом, если $\omega \neq 0,$ то существует ровно n корней степени n из числа ω: все они содержатся в формуле (9).

В частности, если $n = 2,$ то уравнение $z^2 = \omega$ имеет два корня:

$$z_1 = \sqrt{r_0}\left(\cos\frac{\varphi_0}{2} + i\sin\frac{\varphi_0}{2}\right),$$

$$z_2 = \sqrt{r_0}\left(\cos\left(\frac{\varphi_0}{2} + \pi\right) + i\sin\left(\frac{\varphi_0}{2} + \pi\right)\right) = -z_1,$$

то есть эти корни симметричны относительно начала координат.

Также из формулы (9) нетрудно получить, что если $n \geq 3, n \in \mathrm{N},$ то точки, изображающие все корни уравнения $z^n = \omega,$ являются вершинами правильного n-угольника, вписанного в окружность с центром в точке $z = 0$ и радиусом $\sqrt[n]{|\omega|}$.

Пример 10. Найти все значения $\sqrt[3]{-8}$.

Запишем число $\omega = -8$ в тригонометрической форме:

$$\omega = -8 = 8(\cos\pi + i\sin\pi).$$

Применяя формулу (9), получаем

$$z_k = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}k\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}k\right)\right),\ k = 0, 1, 2.$$

Следовательно,

$$z_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 1 + \sqrt{3}i,$$

$$z_1 = 2(\cos\pi + i\sin\pi) = -2,$$

$$z_2 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = 1 - \sqrt{3}i.$$

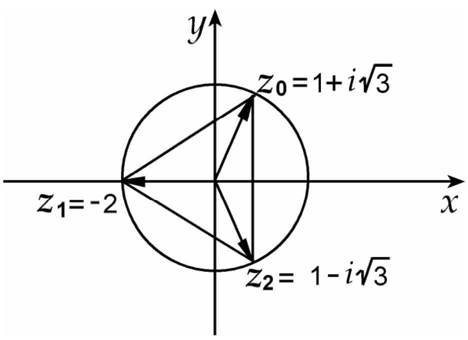

Рис. 8

Точки, соответствующие числам z_0, z_1, z_2, находятся в вершинах правильного треугольника, вписанного в окружность радиуса 2 с центром в точке $z = 0$ (см. рис. 8).

Из сказанного выше видно, что символ $\sqrt[n]{\omega}$ не имеет однозначного смысла. Поэтому, употребляя его, следует четко представлять себе, что под этим символом подразумевается. Например, используя запись $\sqrt{-1}$, следует позаботиться о том, чтобы было ясно, понимается ли под этим символом пара комплексных чисел i и $-i$, или одно, и, если одно, то какое именно.

§ 4. Алгебраические уравнения

1. Квадратные уравнения. В школьном курсе алгебры рассматривались квадратные уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0, \qquad (10)$$

с действительными коэффициентами *a, b, c.* Там было показано, что если дискриминант уравнения (10) неотрицателен, то решения такого уравнения задаются формулой

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \text{где } D = b^2 - 4ac \geq 0. \qquad (11)$$

В случае, если $D < 0$, говорилось, что уравнение не имеет решений.

Для вывода формулы (11) использовался прием выделения квадрата трехчлена с последующим разложением левой части уравнения на линейные множители:

$$ax^2 + bx + c = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a^2}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{D}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{D}}{2a}\right)$$

откуда и получалась формула (11). Очевидно, что все эти выкладки остаются справедливыми и в том случае, когда a, b, c являются комплексными числами, а корни уравнения отыскиваются в множестве комплексных чисел.

Таким образом, в множестве комплексных чисел уравнение

$$az^2 + bz + c = 0, a \neq 0$$

всегда разрешимо. Если $D = b^2 - 4ac = 0$, уравнение имеет один корень; если $D \neq 0$, уравнение имеет два корня. Во всех случаях для корней квадратного уравнения справедлива формула

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \qquad (11')$$

где под $\sqrt{D}$ подразумеваются все значения корня.

Пример 11. Решить уравнение $z^2 + z + 1 = 0$.

По формуле для корней квадратного уравнения имеем

$$z = \frac{-1 + \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}.$$

Так как $\sqrt{-3} = \pm i\sqrt{3}$, то

$$z_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2},\ z_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Пример 12. Решить уравнение $z^2 + (2i - 3)z + 5 - i = 0$.

По формуле для корней квадратного уравнения имеем

$$z = \frac{-(2i-3) + \sqrt{(2i-3)^2 - 4(5-i)}}{2} = \frac{3 - 2i + \sqrt{-15-8i}}{2}.$$

Для определения всех значений $\sqrt{-15-8i}$ положим

$$\sqrt{-15-8i} = x + iy.$$

Тогда

$$-15 - 8i = x^2 - y^2 + 2ixy$$

и, следовательно, x и y удовлетворяют системе

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -15, \\ 2xy = -8, \end{cases}$$

причем x и y действительные числа. Система имеет два действительных решения $x_1 = 1, y_1 = -4$ и $x_2 = -1, y_2 = 4$.

Поэтому

$$z_1 = \frac{3 - 2i + (1 - 4i)}{2} = \frac{4 - 6i}{2} = 2 - 3i,$$

$$z_2 = \frac{3-2i+(-1+4i)}{2} = \frac{2+2i}{2} = 1+i.$$

2. Уравнения высших степеней. Формула (9) полностью решает вопрос о существовании и определении всех корней уравнения $z^n = a$, т.е. двучленного уравнения степени *n*. Неизмеримо сложнее обстоит дело в случае общего алгебраического уравнения степени *n*:

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = 0, \qquad (12)$$

где $a_0, ..., a_n$ – заданные комплексные числа.

Справедлива следующая теорема: *каждое алгебраическое уравнение имеет в множестве комплексных чисел по крайней мере один корень.* Эта теорема называется теоремой Гаусса или основной теоремой высшей алгебры.

С помощью теоремы Гаусса нетрудно доказать, что левая часть уравнения (12) всегда допускает представление в виде произведения:

$$a_0 (z-z_1)^{\alpha_1} (z-z_2)^{\alpha_2} \cdots (z-z_k)^{\alpha_k},$$

где $z_1, z_2, ..., z_k$ – некоторые различные комплексные числа, а $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ – натуральные числа, причем

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k = n$$

(доказательство может быть произведено индукцией по *n*).

Отсюда следует, что числа $z_1, z_2, ..., z_k$ и только они являются корнями уравнения (12). При этом говорят, что z_1, является корнем кратности α_1, z_2 – корнем кратности α_2 и т.д.

Если условиться корень уравнения считать столько раз, какова его кратность, то можно сформулировать теорему: *каждое алгебраическое уравнение степени n имеет в множестве комплексных чисел ровно n корней.*

И теорема Гаусса, и уточняющая ее только что сформулированная теорема полностью решают вопрос о существовании корней у произвольного алгебраического уравнения, но не дают метода отыскания этих корней. Если корень уравнения первой степени $a_1 z + a_0 = 0$ определяется формулой $z = -\dfrac{a_0}{a_1}$, если корень уравнения второй степени

$$a_0 z^2 + a_1 z + a_2 = 0$$

всегда могут быть легко получены с помощью формулы $(11')$, то в случае более высоких степеней дело обстоит иначе: для уравнений третьих и четвертых степеней аналогичные формулы настолько громоздки, что ими предпочитают не пользоваться, а для уравнений степени выше четвертой подобных формул в общем случае вообще не существует.

Отсутствие общего метода решения алгебраических уравнений не мешает, однако, в частных случаях отыскать все корни конкретного уравнения. Для решения уравнений *с целыми коэффициентами* (именно такие уравнения обычно встречаются в школьном курсе математики) часто оказывается полезной следующая теорема: *целые корни любого алгебраического уравнения с целыми коэффициентами являются делителями свободного члена*.

В самом деле, пусть $z = k$ – целый корень уравнения

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = 0$$

где $a_0, a_1, ..., a_n$ – целые числа. Тогда

$$a_0k^n + a_1k^{n-1} + \cdots + a_{n-1}k + a_n = 0$$

Отсюда получаем, что

$$a_n = -k(a_0k^{n-1} + a_1k^{n-2} + \cdots + a_{n-1}),$$

то есть k – делитель числа a_n (число $a_0k^{n-1} + a_1k^{n-2} + \cdots + a_{n-1}$ при сделанных предположениях является целым).

Пример 13. Решить уравнение $z^3 - 4z^2 - 4z - 5 = 0.$

Рассматривая делители свободного члена $\pm 1,\ \pm 5$, убеждаемся в том, что только $z = 5$ является целым корнем уравнения. Делим левую часть уравнения $z - 5$:

$$\begin{array}{r|l} z^3 - 4z^2 - 4z - 5 & z - 5 \\ \cline{2-2} -\ z^3 - 5z^2 & z^2 + z + 1 \\ \cline{1-1} z^2 - 4z & \\ -\ z^2 - 5z & \\ \cline{1-1} z - 5 & \\ -\ z - 5 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Таким образом, $z^3 - 4z^2 - 4z - 5 = (z-5)(z^2 + z + 1) = 0.$

Решая квадратное уравнение $z^2 + z + 1 = 0$ (см. пример 11), получаем остальные корни. Итак,

$$z_1 = 5,\ z_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},\ z_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Пример 14. Найти целые корни уравнения

$$2z^3 - 5z^2 - 2z + 2 = 0.$$

Целыми корнями уравнения могут быть только $\pm 1, \pm 2.$ Подстановка в уравнение показывает, что ни одно из этих четырех чисел не удовлетворяет ему. Значит, это уравнение целых корней не имеет.

Пример 15. Решить уравнение

$$z^4 - 2z^3 - 12z^2 + 18z + 27 = 0.$$

Проверяя делители свободного члена, получаем, что $z = -1$ есть корень уравнения. Разделив многочлен $z^4 - 2z^3 - 12z^2 + 18z + 27$ на $z + 1$, получим многочлен $z^3 - 3z^2 - 9z + 27.$ Корнем уравнения $z^3 - 3z^2 - 9z + 27 = 0$ является число $z = 3.$ Разделив многочлен $z^3 - 3z^2 - 9z + 27$ на $z - 3$, получим $z^2 - 9.$ Таким образом, исходное уравнение может быть записано в виде

$$(z+1)(z-3)(z^2 - 9) = 0,$$

т.е. имеет два однократных корня $z = -1, z = -3$ и один двукратный корень $z = 3.$

При разработке использовалась литература:

1. Пособие по математике для поступающих в вузы: учебн. пособие / Кутасов А.Д., Пиголкина Т.С., Чехлов В.И., Яковлева Т.Х. – под ред. Яковлева Г.Н. – 3-е изд. М.: Наука, 1988, Глава X.

2.Лекции и задачи по элементарной математике / Болтянский В.Г., Сидоров Ю.В., Шабунин М.И. - М.: Наука, 1971. Глава IV.

Контрольные вопросы

1(2). Существуют ли такие действительные числа x и y, для которых

$$z_1 = x + y + (2iy)^3 \quad \text{и} \quad z_2 = 2x + 1 + 8iy^6$$

являются сопряженными.

2(2). Где находится точка z комплексной плоскости, если точка z^2 лежит на мнимой оси?

3(1). Сколько решений имеет система

$$\begin{cases} |z + 2 - i| = 1, \\ |z - 2| = \dfrac{1}{4}? \end{cases}$$

4(3). Является ли тригонометрической формой $1 - i\sqrt{3}$ следующие выражения (ответ обосновать)

$$\text{а) } 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right);$$

$$\text{б) } -2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)?$$

5(2). Является ли многочлен $(z^2 - 1)$ делителем многочлена

а) $z^{100} + 4z^2 - 5;$

б) $z^{101} + 4z^2 - 5.$

Задачи

1(4). Запишите z в алгебраической форме, если

$$\text{а) } z = \frac{4 - i}{(1 + i)^2} + \frac{(1 - i)(2 - i)}{1 + 2i};$$

$$\text{б) } z = \frac{(2 + i)(1 - i) + 7i}{(1 - 2i)^2 + 3 - 4i}.$$

2(4). Запишите решение системы в алгебраической форме

$$\text{а) } \begin{cases} z_1 - 2z_2 = 2, \\ iz_1 + z_2 = 3 - i; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} z_1 + (1 + i)z_2 = 4, \\ 2z_1 - z_2 = i. \end{cases}$$

3(6). Запишите z в тригонометрической форме, если

$$\text{а) } z = -\cos\frac{\pi}{13} - i\sin\frac{\pi}{13};$$

$$\text{б) } z = (1 - i)^6\left(\sqrt{3} + i\right)^4;$$

в) $z = \dfrac{\left(1 + i\sqrt{3}\right)^6}{\left(\sqrt{3} - i\right)^4}$.

4(6). Запишите z в алгебраической и тригонометрической форме, если $z = \left(\sin\dfrac{6\pi}{5} + i + i\cos\dfrac{6\pi}{5}\right)^5$.

5(6). Какое множество точек комплексной плоскости задается условием

а) $|z - 1 + 2i| = 1$;

б) $|z - i| < |z + 2i|$;

в) $\cos|z| = \dfrac{1}{2}$;

г) $\sin|z| = 0$;

д) $|z + i| > 1, \quad -\dfrac{\pi}{4} < \arg z \le \dfrac{\pi}{2}$;

е) $1 < z \cdot \bar{z} \le 2, \quad \operatorname{Re} Z \ge 0, \quad 0 < \operatorname{Im} z < 1$.

6(3). Решите уравнение

а) $z^2 + z(i - 1) - 3i + 6 = 0$.

7(8). Решите уравнения

а) $z^6 - 2z^3 + 1 = 0$;

б) $z^8 + 8z^4 + 16 = 0$.

8(5). Представьте многочлен $P(z) = z^6 - z^5 - 2z^3 + 5z^2 - 9z - 18$ в виде произведения многочленов первой и второй степени с действительными коэффициентами.

9(5). Некоторый многочлен при делении на $(z+1)$ дает остаток 1, при делении на $(z-2)$ дает остаток 3, при делении на $(z-1)$ дает остаток 4. Найдите остаток от деления этого многочлена на

$$(z+1)(z-2)(z-1).$$

10(4). Число $\left(1 + \sqrt{2}\right)$ является корнем многочлена

$$P(z) = z^5 + az^3 + bz^2 + 6z + 2.$$

Найдите этот многочлен, если a и b – рациональные числа.

11(4). Решите уравнение

$$z^4 + 3z^3 + 5z^2 - 12z - 36 = 0.$$

