

Контрольные вопросы

1(2). Существуют ли такие действительные числа x и y , для которых

$$z_1 = x + y + (2iy)^3 \quad \text{и} \quad z_2 = 2x + 1 + 8iy^6$$

являются сопряженными.

2(2). Где находится точка z комплексной плоскости, если точка z^2 лежит на мнимой оси?

3(1). Сколько решений имеет система

$$\begin{cases} |z + 2 - i| = 1, \\ |z - 2| = \frac{1}{4} \end{cases}?$$

4(3). Является ли тригонометрической формой $1 - i\sqrt{3}$ следующие выражения (ответ обосновать)

а) $2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$;
б) $-2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$?

5(2). Является ли многочлен $(z^2 - 1)$ делителем многочлена

а) $z^{100} + 4z^2 - 5$;
б) $z^{101} + 4z^2 - 5$.

Задачи

1(4). Запишите z в алгебраической форме, если

а) $z = \frac{4 - i}{(1 + i)^2} + \frac{(1 - i)(2 - i)}{1 + 2i}$;
б) $z = \frac{(2 + i)(1 - i) + 7i}{(1 - 2i)^2 + 3 - 4i}$.

2(4). Запишите решение системы в алгебраической форме

а) $\begin{cases} z_1 - 2z_2 = 2, \\ iz_1 + z_2 = 3 - i; \end{cases}$ б) $\begin{cases} z_1 + (1 + i)z_2 = 4, \\ 2z_1 - z_2 = i. \end{cases}$

3(6). Запишите z в тригонометрической форме, если

а) $z = -\cos\frac{\pi}{13} - i\sin\frac{\pi}{13}$;
б) $z = (1 - i)^6(\sqrt{3} + i)^4$;
в) $z = \frac{(1 + i\sqrt{3})^6}{(\sqrt{3} - i)^4}$.

4(6). Запишите z в алгебраической и тригонометрической форме, если $z = \left(\sin\frac{6\pi}{5} + i + i\cos\frac{6\pi}{5}\right)^5$.

5(6). Какое множество точек комплексной плоскости задается условием

а) $|z - 1 + 2i| = 1$;

б) $|z - i| < |z + 2i|$;

в) $\cos|z| = \frac{1}{2}$;

г) $\sin|z| = 0$;

д) $|z + i| > 1, \quad -\frac{\pi}{4} < \arg z \leq \frac{\pi}{2}$;

е) $1 < z \cdot \bar{z} \leq 2, \quad \operatorname{Re} z \geq 0, \quad 0 < \operatorname{Im} z < 1$.

6(3). Решите уравнение

а) $z^2 + z(i - 1) - 3i + 6 = 0$.

7(8). Решите уравнения

а) $z^6 - 2z^3 + 1 = 0$;

б) $z^8 + 8z^4 + 16 = 0$.

8(5). Представьте многочлен $P(z) = z^6 - z^5 - 2z^3 + 5z^2 - 9z - 18$ в виде произведения многочленов первой и второй степени с действительными коэффициентами.

9(5). Некоторый многочлен при делении на $(z + 1)$ дает остаток 1, при делении на $(z - 2)$ дает остаток 3, при делении на $(z - 1)$ дает остаток 4. Найдите остаток от деления этого многочлена на

$$(z + 1)(z - 2)(z - 1).$$

10(4). Число $(1 + \sqrt{2})$ является корнем многочлена

$$P(z) = z^5 + az^3 + bz^2 + 6z + 2.$$

Найдите этот многочлен, если a и b – рациональные числа.

11(4). Решите уравнение

$$z^4 + 3z^3 + 5z^2 - 12z - 36 = 0.$$