§ 4. Алгебраические уравнения

1. Квадратные уравнения. В школьном курсе алгебры рассматривались квадратные уравнения

$$ax^2+bx+c=0, a\neq 0, \qquad (10)$$

с действительными коэффициентами *a, b, c.* Там было показано, что если дискриминант уравнения (10) неотрицателен, то решения такого уравнения задаются формулой

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}, \text{где } D=b^2-4ac\geq 0. \qquad (11)$$

В случае, если $D<0$, говорилось, что уравнение не имеет решений.

Для вывода формулы (11) использовался прием выделения квадрата трехчлена с последующим разложением левой части уравнения на линейные множители:

$$ax^2+bx+c=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{D}{4a^2}\right)=a\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{D}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{D}}{2a}\right)$$

откуда и получалась формула (11). Очевидно, что все эти выкладки остаются справедливыми и в том случае, когда *a*, *b*, *c* являются комплексными числами, а корни уравнения отыскиваются в множестве комплексных чисел.

Таким образом, в множестве комплексных чисел уравнение

$$az^2+bz+c=0, a\neq 0$$

всегда разрешимо. Если $D=b^2-4ac=0$, уравнение имеет один корень; если $D\neq 0$, уравнение имеет два корня. Во всех случаях для корней квадратного уравнения справедлива формула

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}, \qquad (11')$$

где под $\sqrt{D}$ подразумеваются все значения корня.

Пример 11. Решить уравнение $z^2+z+1=0.$

По формуле для корней квадратного уравнения имеем

$$z=\frac{-1+\sqrt{1-4}}{2}=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}.$$

Так как $\sqrt{-3}=\pm i\sqrt{3}$, то

$$z_1=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2},\ z_2=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}.$$

Пример 12. Решить уравнение $z^2+(2i-3)z+5-i=0.$

По формуле для корней квадратного уравнения имеем

$$z=\frac{-(2i-3)+\sqrt{(2i-3)^2-4(5-i)}}{2}=\frac{3-2i+\sqrt{-15-8i}}{2}.$$

Для определения всех значений $\sqrt{-15-8i}$ положим

$$\sqrt{-15-8i}=x+iy.$$

Тогда

$$-15-8i=x^2-y^2+2ixy$$

и, следовательно, x и y удовлетворяют системе

$$\begin{cases}x^2-y^2=-15,\\ 2xy=-8,\end{cases}$$

причем x и y действительные числа. Система имеет два действительных решения $x_1 = 1, y_1 = -4$ и $x_2 = -1, y_2 = 4$.

Поэтому

$$z_1 = \frac{3-2i+(1-4i)}{2} = \frac{4-6i}{2} = 2-3i,$$

$$z_2 = \frac{3-2i+(-1+4i)}{2} = \frac{2+2i}{2} = 1+i.$$

2. Уравнения высших степеней. Формула (9) полностью решает вопрос о существовании и определении всех корней уравнения $z^n = a$, т.е. двучленного уравнения степени n. Неизмеримо сложнее обстоит дело в случае общего алгебраического уравнения степени n:

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = 0, \qquad (12)$$

где $a_0, ..., a_n$ – заданные комплексные числа.

Справедлива следующая теорема: *каждое алгебраическое уравнение имеет в множестве комплексных чисел по крайней мере один корень.* Эта теорема называется теоремой Гаусса или основной теоремой высшей алгебры.

С помощью теоремы Гаусса нетрудно доказать, что левая часть уравнения (12) всегда допускает представление в виде произведения:

$$a_0 (z-z_1)^{\alpha_1} (z-z_2)^{\alpha_2} \cdots (z-z_k)^{\alpha_k},$$

где $z_1, z_2, ..., z_k$ – некоторые различные комплексные числа, а $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ – натуральные числа, причем

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k = n$$

(доказательство может быть произведено индукцией по n).

Отсюда следует, что числа $z_1, z_2, ..., z_k$ и только они являются корнями уравнения (12). При этом говорят, что z_1, является корнем кратности α_1, z_2 – корнем кратности α_2 и т.д.

Если условиться корень уравнения считать столько раз, какова его кратность, то можно сформулировать теорему: *каждое алгебраическое уравнение степени n имеет в множестве комплексных чисел ровно n корней.*

И теорема Гаусса, и уточняющая ее только что сформулированная теорема полностью решают вопрос о существовании корней у произвольного алгебраического уравнения, но не дают метода отыскания этих корней. Если корень уравнения первой степени $a_1 z + a_0 = 0$ определяется формулой $z = -\frac{a_0}{a_1}$, если корень уравнения второй степени

$$a_0 z^2 + a_1 z + a_2 = 0$$

всегда могут быть легко получены с помощью формулы $(11')$, то в случае более высоких степеней дело обстоит иначе: для уравнений третьих и четвертых степеней аналогичные формулы настолько громоздки, что ими предпочитают не пользоваться, а для уравнений степени выше четвертой подобных формул в общем случае вообще не существует.

Отсутствие общего метода решения алгебраических уравнений не мешает, однако, в частных случаях отыскать все корни конкретного уравнения. Для решения уравнений *с целыми коэффициентами* (именно такие уравнения обычно встречаются в школьном курсе математики) часто оказывается полезной следующая теорема: *целые* *корни любого алгебраического уравнения с целыми коэффициентами являются делителями свободного члена*.

В самом деле, пусть $z = k$ – целый корень уравнения

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = 0$$

где $a_0, a_1, ..., a_n$ – целые числа. Тогда

$$a_0 k^n + a_1 k^{n-1} + \cdots + a_{n-1} k + a_n = 0$$

Отсюда получаем, что

$$a_n = -k(a_0 k^{n-1} + a_1 k^{n-2} + \cdots + a_{n-1}),$$

то есть k – делитель числа a_n (число $a_0 k^{n-1} + a_1 k^{n-2} + \cdots + a_{n-1}$ при сделанных предположениях является целым).

Пример 13. Решить уравнение $z^3 - 4z^2 - 4z - 5 = 0.$

Рассматривая делители свободного члена ± 1, ± 5, убеждаемся в том, что только $z = 5$ является целым корнем уравнения. Делим левую часть уравнения $z - 5$:

$$\begin{array}{r|l} -\; z^3 - 4z^2 - 4z - 5 & z - 5 \\ \cline{2-2} z^3 - 5z^2 \phantom{{}-4z-5} & z^2 + z + 1 \\ \cline{1-1} -\; z^2 - 4z \phantom{{}-5} & \\ z^2 - 5z \phantom{{}-5} & \\ \cline{1-1} -\; z - 5 & \\ z - 5 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Таким образом, $z^3 - 4z^2 - 4z - 5 = (z - 5)(z^2 + z + 1) = 0.$

Решая квадратное уравнение $z^2 + z + 1 = 0$ (см. пример 11), получаем остальные корни. Итак,

$$z_1 = 5,\ z_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},\ z_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Пример 14. Найти целые корни уравнения

$$2z^3 - 5z^2 - 2z + 2 = 0.$$

Целыми корнями уравнения могут быть только $\pm 1, \pm 2.$ Подстановка в уравнение показывает, что ни одно из этих четырех чисел не удовлетворяет ему. Значит, это уравнение целых корней не имеет.

Пример 15. Решить уравнение

$$z^4 - 2z^3 - 12z^2 + 18z + 27 = 0.$$

Проверяя делители свободного члена, получаем, что $z = -1$ есть корень уравнения. Разделив многочлен $z^4 - 2z^3 - 12z^2 + 18z + 27$ на $z + 1$, получим многочлен $z^3 - 3z^2 - 9z + 27.$ Корнем уравнения $z^3 - 3z^2 - 9z + 27 = 0$ является число $z = 3.$ Разделив многочлен $z^3 - 3z^2 - 9z + 27$ на $z - 3$, получим $z^2 - 9.$ Таким образом, исходное уравнение может быть записано в виде

$$(z + 1)(z - 3)(z^2 - 9) = 0,$$

т.е. имеет два однократных корня $z = -1, z = -3$ и один двукратный корень $z = 3.$

