§3. Свойства арифметического квадратного корня

В школьном учебнике у вас доказываются две теоремы.

Теорема 1. Если $a \ge 0$ и $b \ge 0$, то $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$.

Теорема 2. Если $a \ge 0$ и $b > 0$, то $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Пример 1. Найдите значение выражения (без микрокалькулятора):

а) $\sqrt{5 \cdot 35 \cdot 175}$; б) $\sqrt{5\dfrac{11}{49}}$; в) $\dfrac{\sqrt{75}}{\sqrt{192}}$;

г) $\sqrt{\dfrac{149^2 - 76^2}{457^2 - 384^2}}$; д) $\sqrt{16^3 \cdot 4^4}$.

Δ а) $\sqrt{5 \cdot 35 \cdot 175} = \sqrt{175 \cdot 175} = 175$.

б) $\sqrt{5\dfrac{11}{49}} = \sqrt{\dfrac{256}{49}} = \dfrac{16}{7}$.

в) $\dfrac{\sqrt{75}}{\sqrt{192}} = \sqrt{\dfrac{75}{192}} = \sqrt{\dfrac{25}{64}} = \dfrac{5}{8}$.

г) $$\sqrt{\frac{149^2 - 76^2}{457^2 - 384^2}} = \sqrt{\frac{(149-76)(149+76)}{(457-384)(457+384)}} = \sqrt{\frac{73 \cdot 225}{73 \cdot 841}} =$$

$$= \sqrt{\frac{225}{841}} = \frac{\sqrt{225}}{\sqrt{841}} = \frac{15}{29}.$$

д) $\sqrt{16^3 \cdot 4^4} = \sqrt{\left(4^2\right)^3 \cdot 4^4} = \sqrt{4^6 \cdot 4^4} = \sqrt{4^{10}} = \sqrt{\left(4^5\right)^2} = 4^5$.

Можно решать и другим способом.

$$\sqrt{16^3 \cdot 4^4} = \sqrt{16^2 \cdot 16 \cdot 4^4} = \sqrt{16^2} \cdot \sqrt{16} \cdot \sqrt{\left(4^2\right)^2} = 16 \cdot 4 \cdot 4^2 =$$

$$= 4^2 \cdot 4 \cdot 4^2 = 4^5. \ ▲$$

Рассмотрим $\sqrt{48}$. Преобразуем это выражение: $\sqrt{48} = \sqrt{16 \cdot 3} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$.

В этом случае мы говорим, что множитель 4 вынесли из под знака корня.

Теперь рассмотрим выражение $5\sqrt{7}$, преобразуем его:

$$5\sqrt{7} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{7} = \sqrt{25 \cdot 7} = \sqrt{175}.$$

В этом случае говорим, что множитель 5 внесли под знак корня.

Пример 2. Вынесите множитель из под знака корня:

а) $\sqrt{\left(5\sqrt{13} - 4\sqrt{19}\right)^2}$; б) $\sqrt{\left(\sqrt{7} - \sqrt{11}\right)^3 \left(\sqrt{3} - \sqrt{5}\right)^5}$;

в) $-\sqrt{-a^4 b^{11}}$; г) $\sqrt{21(xy)^2}$, если $xy \le 0$.

Δ Так как $\sqrt{a^2} = |a|$, то $\sqrt{\left(5\sqrt{13} - 4\sqrt{19}\right)^2} = \left|5\sqrt{13} - 4\sqrt{19}\right|$.

Определим знак числа $5\sqrt{13}4 - \sqrt{19}$. Числа $5\sqrt{13}$ и $4\sqrt{19}$ – положительные. Рассмотрим их квадраты: $\left(5\sqrt{13}\right)^2 = 25 \cdot 13 = 325$ и $\left(4\sqrt{19}\right)^2 = 16 \cdot 19 = 304$. Так как $304 < 325$, то $\sqrt{304} < \sqrt{325}$, т. е.

$$5\sqrt{13} > 4\sqrt{19}, \text{ поэтому } \left|5\sqrt{13} - 4\sqrt{19}\right| = 5\sqrt{13} - 4\sqrt{19}.$$

б) $\sqrt{\left(\sqrt{7}-\sqrt{11}\right)^3\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)^5} =$

$=\sqrt{\left(\sqrt{7}-\sqrt{11}\right)^2\left(\sqrt{7}-\sqrt{11}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)^4\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)} =$

$=\left|\sqrt{7}-\sqrt{11}\right|\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)^2\sqrt{\left(\sqrt{7}-\sqrt{11}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)}.$

Число $\sqrt{7}<\sqrt{11}$, т. к. $\left(\sqrt{7}\right)^2=7$, $\left(\sqrt{11}\right)^2=11$ и $7<11$. Поэтому

$$\sqrt{7}-\sqrt{11}<0, \text{ т. е. } \left|\sqrt{7}-\sqrt{11}\right|=\sqrt{11}-\sqrt{7}.$$

Окончательно получаем: $\left(\sqrt{11}-\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)^2\sqrt{\left(\sqrt{7}-\sqrt{11}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)}.$

в) Так как $a^4\geq 0$, то корень определен, если $-b^{11}\geq 0$, т. е. $b^{11}\leq 0, b\leq 0$.

$-\sqrt{a^4\left(-b^5\right)^2(-b)}=-a^2\left(-b^5\right)\sqrt{-b}=a^2b^5\sqrt{-b}.$

г) $\sqrt{21(xy)^2}=|xy|\sqrt{21}=-xy\sqrt{21}.$ ▲

Пример 3. Внесите множитель под знак корня:

а) $\left(5-\sqrt{37}\right)\sqrt{\sqrt{2}+3}$; б) $(2a-1)\sqrt{1-2a}$; в) $-3xy\sqrt{-\dfrac{1}{(xy)^3}}$.

Δ При решении этих примеров используем формулу $\sqrt{a^2}=|a|$.

а) Число $5-\sqrt{37}<0$, т. к. $5^2=25$, $\left(\sqrt{37}\right)^2=37$ и $25<37$. Поэтому

$\left(5-\sqrt{37}\right)\sqrt{\sqrt{2}+3}=-\left(\sqrt{37}-5\right)\sqrt{\sqrt{2}+3}=-\sqrt{\left(\sqrt{37}-5\right)^2\left(\sqrt{2}+3\right)}.$

б) Корень $\sqrt{1-2a}$ определен, если $1-2a\geq 0$, $2a\leq 1$, $a\leq\dfrac{1}{2}$. При таких a выражение $2a-1<0$. Поэтому

$(2a-1)\sqrt{1-2a}=-(1-2a)\sqrt{1-2a}=-\sqrt{(1-2a)^2(1-2a)}=-\sqrt{(1-2a)^3}.$

Корень $\sqrt{-\dfrac{1}{(xy)^3}}$ определен, если $xy<0$. Поэтому

$$-3xy\sqrt{-\frac{1}{(xy)^3}}=3(-xy)\sqrt{-\frac{1}{(xy)^3}}=\sqrt{9(-xy)^2\left(-\frac{1}{(xy)^3}\right)}=\sqrt{\frac{-9}{xy}}.$$

Пример 4. Сравните числа a и b:

а) $a=\sqrt{3}+\sqrt{11}$ и $b=\sqrt{6}+\sqrt{8}$;

б) $a=2-\sqrt{3}$ и $b=\sqrt{7-4\sqrt{3}}$;

в) $a=\dfrac{2}{5+3\sqrt{3}}-\dfrac{2}{5-3\sqrt{3}}$ и $b=\sqrt{110}$.

Δ а) Числа a и b положительные. Рассмотрим квадраты этих чисел. Имеем: $a^2=3+2\sqrt{3}\sqrt{11}+11=14+2\sqrt{33}$, $b^2=6+2\sqrt{6}\sqrt{8}+8=$ $=14+2\sqrt{48}$. Так как $48>33$, то $\sqrt{48}>\sqrt{33}$, $2\sqrt{48}>2\sqrt{33}$, поэтому $b^2>a^2$ и $b>a$.

б) Число $a>0,$ т. к. $2^2>\left(\sqrt{3}\right)^2=3.$ Число $7-4\sqrt{3}>0,$ т. к. $7^2>\left(4\sqrt{3}\right)^2=48.$ Число b определено и оно больше нуля.

Следовательно, оба числа a и b положительные. Рассмотрим их квадраты. $a^2=\left(2-\sqrt{3}\right)^2=4-4\sqrt{3}+3=7-4\sqrt{3},$ $b^2=7-4\sqrt{3}.$ Следовательно, $a=b.$

в) $a=\dfrac{2}{5+3\sqrt{3}}-\dfrac{2}{5-3\sqrt{3}}.$

Приводим дроби к общему знаменателю, получаем:

$$\frac{10-6\sqrt{3}-10-6\sqrt{3}}{\left(5+3\sqrt{3}\right)\left(5-3\sqrt{3}\right)}=\frac{-12\sqrt{3}}{25-9\cdot 3}=-\frac{12\sqrt{3}}{-2}=6\sqrt{3}=\sqrt{108}.$$

Так как $110>108,$ то $\sqrt{110}>\sqrt{108},$ поэтому $b>a.$

Пример 5. Освободиться от иррациональности в знаменателе дроби:

$$\text{а) } \frac{2}{3\sqrt{5}-\sqrt{7}}; \qquad \text{á) } \frac{1+\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}+\sqrt{5}}.$$

Δ Эту задачу надо понимать так: следует так преобразовать дробь, чтобы в знаменателе отсутствовали квадратные корни.

При решении этих задач полезно использовать формулу

$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2.$$

а) Умножим числитель и знаменатель дроби на $3\sqrt{5}+\sqrt{7},$ получаем:

$$\frac{2\left(3\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)}{\left(3\sqrt{5}-\sqrt{7}\right)\left(3\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)}=\frac{6\sqrt{5}+2\sqrt{7}}{\left(3\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{7}\right)^2}=\frac{6\sqrt{5}+2\sqrt{7}}{45-49}=$$

$$=-\frac{3\sqrt{5}+\sqrt{7}}{2}.$$

б) Умножим числитель и знаменатель дроби на выражение $\left(3-\sqrt{2}\right)-\sqrt{5},$ получаем: $\dfrac{\left(1+\sqrt{2}\right)\left(\left(3-\sqrt{2}\right)-\sqrt{5}\right)}{\left(\left(3-\sqrt{2}\right)+\sqrt{5}\right)\left(\left(3-\sqrt{2}\right)-\sqrt{5}\right)}=$

$$=\frac{3-\sqrt{2}-\sqrt{5}+3\sqrt{2}-2-\sqrt{10}}{\left(9+2-6\sqrt{2}\right)-5}=\frac{1+2\sqrt{2}-\sqrt{5}-\sqrt{10}}{6\left(1-\sqrt{2}\right)}.$$

В полученной дроби умножаем числитель и знаменатель на $1+\sqrt{2},$ получаем: $\dfrac{\left(1+\sqrt{2}\right)\left(1+2\sqrt{2}-\sqrt{5}-\sqrt{10}\right)}{6(1-2)}=$

$$=-\frac{1+\sqrt{2}+2\sqrt{2}+4-\sqrt{5}-\sqrt{10}-\sqrt{10}-\sqrt{20}}{6}=$$

$$=-\frac{5+3\sqrt{2}-3\sqrt{5}-2\sqrt{10}}{6}.$$