Введение

Дорогие ребята!

Вы получили очередное задание по математике. В этом учебном году вам предстоит познакомиться с квадратными уравнениями. Решение многих задач сводится к решению квадратных уравнений. Постарайтесь хорошо справиться с решениями задач этого задания, тогда вы сможете усвоить и следующее задание, в котором будут решаться квадратные уравнения.

§1. Определение арифметического квадратного корня

Рассмотрим простейшую задачу. Пусть площадь квадрата равна 25. Требуется определить сторону квадрата. Если сторона квадрата равна x, то для нахождения длин сторон квадрата получаем уравнение $x^2 = 25$. Этому уравнению удовлетворяют два числа: 5 и -5. Эти числа называют квадратными корнями числа 25. Заметим, что один корень является положительным, а второй корень является отрицательным числом.

Арифметическим квадратным корнем из числа a называется неотрицательное число, квадрат которого равен a.

Обозначают арифметический квадратный корень так: $\sqrt{a}$.

Например, $\sqrt{64} = 8;\ \sqrt{1{,}44} = 1{,}2;\ \sqrt{0} = 0.$

Равенство $\sqrt{a} = b$ является верным, если выполняются два условия: 1) $b \ge 0$ и 2) $b^2 = a$.

При $a < 0$ выражение $\sqrt{a}$ не имеет смысла, т. к. квадрат любого неотрицательного числа – число неотрицательное. Поэтому выражения $\sqrt{-49}$ и $\sqrt{-3{,}5}$ не имеют смысла.

Из определения арифметического корня следует, что если $\sqrt{a}$ имеет смысл, то $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ и $\sqrt{a^2} = |a|$.

Докажем, что, действительно, $\sqrt{a^2} = |a|$. Если $a \ge 0$, то из определения арифметического корня следует, что $\sqrt{a^2} = |a|$.

Если же $a < 0$, то $-a > 0$. Поэтому $\sqrt{a^2} = -a$, т. к. $-a > 0$ и $(-a)^2 = a^2$. Таким образом, арифметический корень $\sqrt{a^2}$ равен a, если $a \ge 0$ и равен $(-a)$, если $a < 0$, т. е. $\sqrt{a^2} = |a|$.

Пример 1. Найдите значение выражения:

а) $2\sqrt{12{,}25} - 0{,}1 \cdot \sqrt{0{,}25}$; б) $\sqrt{(-9)^2}$; в) $\sqrt{-16{,}2}$.

а) Из определения арифметического корня следует, что $\sqrt{12{,}25} = 3{,}5$, т. к. $3{,}5 > 0$ и $3{,}5^2 = 12{,}25$, $\sqrt{0{,}25} = 0{,}5$, т. к. $0{,}5 > 0$ и $0{,}5^2 = 0{,}25$. Получаем: $2 \cdot 3{,}5 - 0{,}1 \cdot 0{,}5 = 7 - 0{,}5 = 6{,}95$.

б) $\sqrt{(-9)^2} = 9$, т. к. $\sqrt{(-9)^2} = |-9| = 9$.

в) Данное выражение не имеет смысла, т. к. квадрат любого числа является неотрицательным числом.

Пример 2. При каких x имеет смысл выражение:

а) $\dfrac{3x}{\sqrt{x-1}}$; б) $\dfrac{2x+1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+2}}$?

а) Выражение $\sqrt{x-1}$ определено, если $x-1 \geq 0$, т. е. при $x \geq 1$. Но так как $\sqrt{x-1}$ стоит в знаменателе, то данное выражение определено, если $x > 1$.

б) Выражение $\sqrt{x}$ определено при $x \geq 0$, а выражение $\sqrt{x+2}$ определено при $x+2 \geq 0, x \geq -2$. Таким образом, при $x \geq 0$ определены оба корня. При таких x имеем: $\sqrt{x} \geq 0$ и $\sqrt{x+2} > 0$, поэтому знаменатель при $x \geq 0$ не обращается в нуль, значит, при $x \geq 0$ данное выражение имеет смысл.

Пример 3. Решите уравнение:

а) $\sqrt{x}+2=0$, б) $\sqrt{x}-3=0$, в) $\sqrt{5x+6}=6$, г) $\sqrt{3x-7}=-5$.

а) Арифметический корень $\sqrt{x}$ определен при $x \geq 0$, при этом $\sqrt{x} \geq 0$, значит, при любом $x \geq 0$ выражение $\sqrt{x}+2 \geq 2$, поэтому данное уравнение не имеет решений.

б) $\sqrt{x}=3$, из определения арифметического корня следует, что $\left(\sqrt{x}\right)^2 = x = 9$, т. е. $x=9$ является корнем уравнения.

в) Предположим, что данное уравнение имеет решение, тогда $\left(\sqrt{5x+6}\right)^2 = 5x+6 = 6^2$. Отсюда уже видно, что $5x+6>0$, т. е. выражение $\sqrt{5x+6}$ определено. Решаем уравнение: $5x+6=36$, $5x=30$, $x=6$.

г) Уравнение не имеет смысла, т. к. арифметический корень из неотрицательного числа – число неотрицательное, а число $-5<0$.