§ 3. Задачи на построение

Задачи на построение рассматривались в задании № 2 для 8 класса. Однако некоторые учащиеся поступили в ФЗФТШ только в этом году, поэтому уделим этой теме внимание ещё раз, остановимся также на методе геометрических мест, методе подобия и методе симметрии.

В задачах на построение требуется построить некоторую геометрическую фигуру, используя только линейку и циркуль. С помощью линейки можно проводить прямую (но нельзя с её помощью откладывать отрезки или, пользуясь двумя краями, проводить параллельные прямые), с помощью циркуля можно на данной прямой отложить любой данный отрезок, а также проводить окружности любого радиуса.

Главное в задачах на построение – это найти и описать последовательность действий (осуществляемых с помощью циркуля и линейки), ведущих к построению нужной фигуры, доказать, что построенная фигура удовлетворяет всем условиям задачи, выяснить, всегда ли построение можно осуществить, сколько существует решений, нет ли частных случаев, в которых построение упрощается, усложняется или делается невозможным.

При решении задач, как составные шаги решения, будем использовать основные построения, считая их известными (повторите по учебнику):

Построение 1: построение треугольника по трём сторонам.

Построение 2: построение угла, равного данному, от полупрямой в данную полуплоскость.

Построение 3: построение биссектрисы угла.

Построение 4: деление отрезка пополам (одновременное построение серединного перпендикуляра данного отрезка).

Построение 5: построение перпендикуляра к данной прямой через данную точку.

Построение 6: построение прямой, проходящей через данную точку параллельно данной прямой.

Как правило, решение задач на построение начинают с анализа задачи. Предполагают задачу решённой и делают от руки примерный чертёж искомой фигуры. По чертежу, используя данные задачи, пытаются установить, к нахождению какой точки (прямой, окружности) сводится решение задачи. При этом часто приходится проводить дополнительные построения. Иногда это делается наудачу, не зная заранее, принесёт ли такое построение пользу или нет. Удача и простота решения зависят главным образом от навыка решения таких задач, от знания методов решения задач на построение. Рассмотрим пример задачи на построение.

Задача 12. Дан отрезок m и острый угол α. Построить прямоугольный треугольник с углом α, у которого сумма катетов равна m.

▷ Анализ. Предположим, что задача решена, построен прямоугольный треугольник ABC, в котором $\angle A = \alpha$ и $AC + BC = m$ (рис. 23). На прямой AC отложим отрезок CD, равный катету BC, тогда $AD = m$, а треугольник BCD – прямоугольный равнобедренный, и $\angle BDC = 45°$. Мы получили треугольник ABD, в котором известна сторона AD и два прилежащих к ней угла – такой треугольник можно построить.

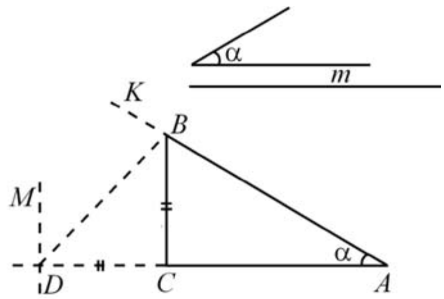

Рис. 23

Построение. Шаг 1. На прямой l откладываем отрезок $AD = m$ и строим угол DAK, равный данному углу α (построение 2).

Шаг 2. Через точку D проводим перпендикуляр DM к прямой DA (построение 5).

Шаг 3. Проводим биссектрису прямого угла MDC (построение 3), получаем точку B на луче AK.

Шаг 4. Через точку B проводим перпендикуляр к прямой AD (построение 5), получаем точку C. Треугольник ABC – искомый.

Действительно, $\angle BAC = \alpha$, а из $BC \perp AD$ и $\angle BDC = 45°$ следует, что $AC + BC = AC + CD = m$. Построение возможно всегда, треугольник ADB, а следовательно, и треугольник ABC определяются единственным образом. ◁

Замечание. В этой задаче была задана сумма двух сторон треугольника, и мы как бы “развернули” эти стороны так, что они легли на одну прямую, – получили отрезок AD. Этот приём называется методом спрямления и обычно применяется в задачах, условия которых содержат сумму или разность сторон треугольника (четырехугольника).

Обратите внимание, что в решении задач на построение можно выделить 4 обязательных этапа: анализ, в котором намечается план построения, само построение, доказательство того, что построенная фигура удовлетворяет условиям и, наконец, исследование возможности построения. Анализ опускают в простых задачах или тех, решение которых уже известно.

Одним из методов решения задач на построение является *метод геометрических мест*. Особенно удобен этот метод, когда требуется построить точку (или точки), удовлетворяющие нескольким условиям. При решении задач часто используется знание следующих геометрических мест:

а) геометрическое место точек, находящихся на данном расстоянии a от точки A, есть окружность радиуса a с центром в точке A;

б) геометрическое место точек, равноудалённых от точек A и B, есть серединный перпендикуляр отрезка AB;

в) геометрическое место точек, находящихся на заданном расстоянии от прямой l, есть две прямые, параллельные l;

г) геометрическое место центров окружностей, касающихся данной прямой AB в точке C, есть перпендикуляр к AB в точке C (за исключением точки C)

д) геометрическое место вершин прямоугольных треугольников с гипотенузой AB, есть окружность с диаметром AB, за исключением точек A и B.

Проиллюстрируем указанный метод на следующей задаче.

Задача 13. Построить окружность, проходящую через данную точку A и касающуюся данной прямой l в точке B.

$\triangleright$ Анализ. Так как окружность должна касаться прямой l в точке B (рис. 24), то её центр O должен принадлежать перпендикуляру BD к прямой l.

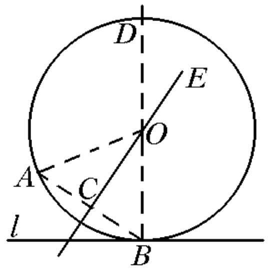

Рис. 24

Кроме того, окружность должна проходить через точки A и B, следовательно, её центр должен быть одинаково удалён от этих точек, т.е. лежать на серединном перпендикуляре CE к отрезку AB. Поэтому искомый центр, находясь одновременно на прямых BD и CE, является точкой их пересечения.

Построение – проведение этих прямых (построения 4 и 5).

Доказательство. $CE \perp AB$, $AC = CB$, $\Delta COB = \Delta COA$ (по двум катетам), следовательно, $OA = AB$. Точка B лежит на окружности и $OB \perp l$, следовательно, l – касательная в точке B.

Исследование. Задача имеет решение и притом единственное, если прямые BD и CE пересекаются, не параллельны, т.е. если точка A не лежит на прямой l. $\triangleleft$

Метод подобия. Во многих задачах бывает удобно строить сначала не саму искомую фигуру, а ей подобную. В этом случае данные для построения разбиваются на две группы: одни используются для построения подобных фигур (подобных фигур существует бесконечно много), а другие служат для того, чтобы от этих фигур перейти к искомой. Метод подобия часто применяется при вписывании одних фигур в другие.

Задача 14. В данный треугольник вписать квадрат так, чтобы одна сторона квадрата лежала на стороне треугольника, а две вершины лежали на других сторонах треугольника.

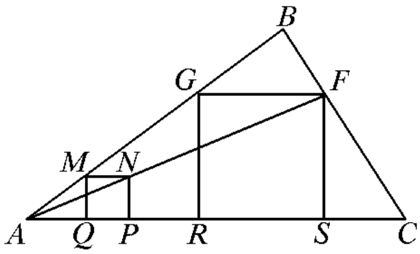

Рис. 25

$\triangleright$ Ослабим задачу. Построим квадрат, у которого одна сторона лежит на стороне треугольника и одна вершина лежит на другой стороне треугольника. Эта задача проще и имеет много решений.

Возьмём, например, на стороне AB некоторую точку M (рис. 25) и опустим перпендикуляр MQ на AC. Далее строим квадрат $MNPQ$ (построение 5 и 6). Для построения искомого квадрата надо квадрат $MNPQ$ как бы “растянуть” так, чтобы он удовлетворял и другому условию: одна из вершин принадлежала стороне BC. Для этого проведём через точки A и N прямую AF. Опустим из точки F перпендикуляр FS на отрезок AC, проведём через точку F прямую, параллельную AC, и из точки G опустим перпендикуляр GR на отрезок AC (построения 5 и 6). Докажем, что $FSRG$ – квадрат. Достаточно доказать, что $FS = FG$. Из подобия треугольников ANP и AFS имеем

$$FS : NP = AF : AN \qquad (1)$$

Аналогично, из подобия треугольников AMN и AGF имеем

$$FG : MN = AF : AN \qquad (2)$$

Так как $NP = MN$, то из (1) и (2) следует, что $FS = FG$, т.е. $FRSG$ – квадрат. Исследование проведите самостоятельно. ◁

В заключении остановимся на <u>*методе симметрии*</u>. Задачу иногда удаётся упростить, заменив один из заданных элементов (точку, прямую, окружность) другим, симметрично расположенным относительно некоторой прямой. Классическим примером такой задачи является следующая.

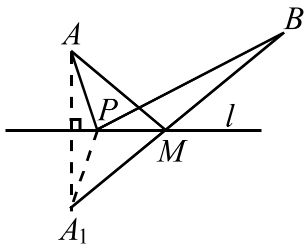

Рис. 26

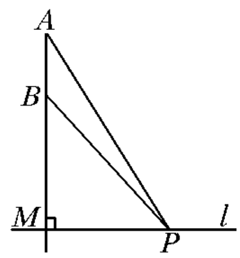

Рис. 27

Задача 15. Даны две точки A и B, расположенные по одну сторону от данной прямой. Найти на прямой точку, сумма расстояний от которой до двух заданных точек наименьшая.

▷ <u>Анализ.</u> Рассмотрим точку A_1, симметричную данной точке A относительно данной прямой (рис. 26), и пусть точка P – произвольная точка этой прямой. Так как $AP = A_1P$, то $AP + BP = A_1P + BP.$ Сумма $AP + PB$ будет наименьшей, когда сумма $A_1P + PB$ достигнет наименьшего значения. А последняя сумма, очевидно, будет наименьшей тогда, когда точка P будет лежать на прямой $A_1B.$

Теперь очевидно построение: строим точку, симметричную одной из заданных точек относительно заданной прямой, проводим через неё и другую точку прямую; точка пересечения построенной прямой и данной будет искомой. Доказательство очевидно. Задача всегда имеет единственное решение. В частном случае, когда точки A и B лежат на общем перпендикуляре к прямой, построение очевидно (рис. 27).

$AP + PB > AM + BM$, если $P \neq M$. ◁